Introduzione alle Derivate

Obiettivi

- crescenza e decrescenza
- massimi e minimi
- punti critici
- concavità e convessità

Rapporto incrementale

- Incremento della variabile indipendente:

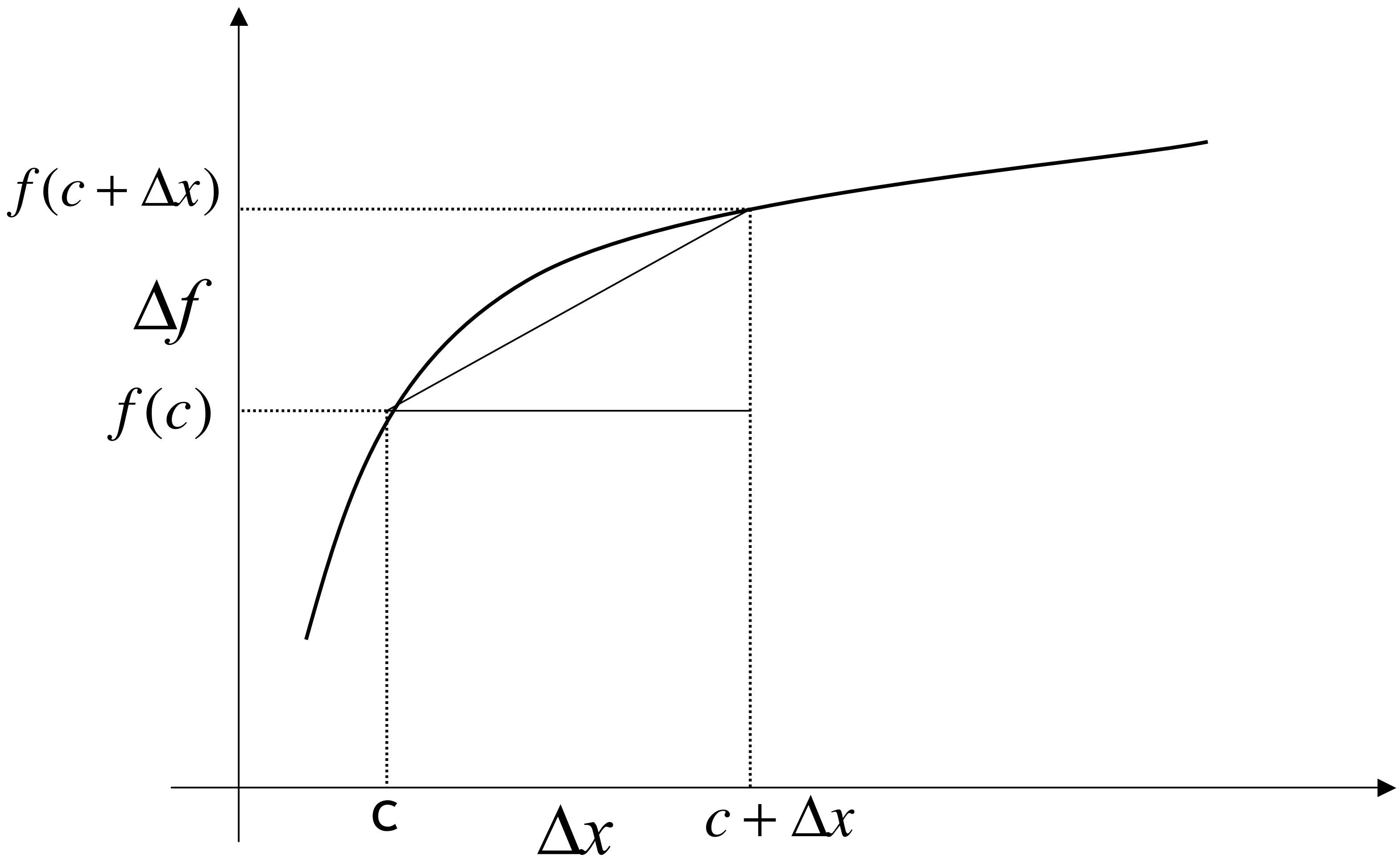
$$\Delta x = (c + \Delta x) - c$$

- Incremento della variabile dipendente:

$$\Delta f = f(c + \Delta x) - f(c)$$

- Rapporto incrementale → $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Graficamente



Derivabilità

- La funzione *f* è derivabile in *c* (punto di accumulazione del suo dominio) se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$$

- Simboli utilizzati:

$$f'(c),\ Df(c),\ \frac{df}{dx}(c)$$

Osservazioni:

- Graficamente, il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della secante al grafico della funzione.

- Passando al limite del rapporto incrementale, la secante assume la posizione tangente al grafico della funzione nel punto considerato

- La derivata della funzione nel punto c rappresenta quindi il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione nel punto c.

Esempio

$$f(x)=\sqrt{x} \qquad c=1$$

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-\sqrt{1}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\Delta x}-1)(\sqrt{1+\Delta x}+1)}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)}=\frac{1}{2}$$

Quindi $f'(1)=\dfrac{1}{2}$

Esempio

$$f(x) = x^2 \quad c = 3$$

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - 9}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + 6 = 6$$

Quindi $f'(3) = 6$

Esempio

$$f(x)=\ln(x) \quad c=2$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(2+\Delta x)-\ln(2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{2+\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Ricordiamo che $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (limite notevole) e dunque ponendo

$z=\frac{\Delta x}{2}$ si ha $\lim_{z\to 0}\frac{1}{2z}\ln\left(1+z\right)=\frac{1}{2}$

Quindi $f'(2)=\frac{1}{2}$

Esempio

$$f(x) = e^x \quad c = 1$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{1+\Delta x} - e^1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e \cdot e^{\Delta x} - e}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Ricordiamo che $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (limite notevole) e dunque

si ha $f'(1) = e$

Funzione Derivata

- Data una funzione *y=f(x)*, possiamo introdurre una nuova funzione chiamata funzione derivata di *f(x)* e rappresentata con uno dei simboli:

$$f'(x)$$

$$Df(x)$$

$$\frac{df}{dx}(x)$$

- Ad ogni elemento *x* del dominio della funzione *f*, si associa il valore della derivata di *f* nel punto *x*.

Teorema: condizione necessaria per la derivabilità

- Se $f(x)$ è derivabile in c, allora $f(x)$ è continua in c.

- NON VALE IL VICEVERSA

- La derivabilità in un punto è una condizione più forte della continuità

Controesempio

- La funzione valore assoluto è continua nell'origine ma non è ivi derivabile.

- Continuità nell'origine:

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

- Calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \nexists$$

Dimostrazione Cond. Nec. Di Derivabilita`

Utilizziamo l'ipotesi di derivabilità:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(c + \Delta x) - f(c) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(c + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(c)$$

Si ottiene cosi la definizione di continuità.

Derivata destra e sinistra in un punto

- Derivata destra:

$$f'(c)^+ = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

- Derivata sinistra:

$$f'(c)^- = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Osservazione

- Esiste la derivata in un punto se e solo se esistono la derivata destra e sinistra nel punto ed assumono lo stesso valore.

→ nell'esempio precedente si aveva:

$$f'(0)^{+} = 1 \neq f'(0)^{-} = -1$$

- Una funzione si dice derivabile se è derivabile in ogni punto del suo dominio

Derivate successive

- la funzione derivata può essere a sua volta derivata, si definisce derivata seconda:

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x) - f'(c)}{\Delta x}$$

- Iterando il procedimento si hanno derivate successive (di ordine *n*) denotate:

$$f^{(n)}(x), \ \frac{d^n f}{dx^n}(x), \ D^n f(x)$$