Regole di Derivazione

Derivata della somma

- Teorema → Se *f* e *g* sono derivabili in *x* anche *(f+g)* è derivabile in *x* e si ha:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

- Dimostrazione. Rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}$$

- Prendiamone il limite $\Delta x \to 0$ e applichiamo la proprietà: limite di una somma uguale somma dei limiti →

Derivata della somma

- Si ottiene:

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

per definizione di derivata.

→ Conseguenza (derivata della differenza):

$$[f(x)-g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Esempio

$$f(x) = \log x + \sqrt{x} - x^4$$

$$Df(x) = D(\log x) + D\sqrt{x} - Dx^4$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4x^3$$

Derivata del prodotto

- Teorema

Se *f* e *g* sono derivabili in *x* anche *(f.g)* è derivabile in *x* e si ha:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Esempio

$$f(x) = x^3 \cdot \log x$$

$$Df(x) = Dx^3 \cdot \log x + x^3 \cdot D\log x = 3x^2 \cdot \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^2 \cdot \left(3\log x + 1\right)$$

Derivata del quoziente

- Teorema:

Se *f* e *g* sono derivabili in *x* (con *g'(x)* non nulla) anche *(f/g)* è derivabile in *x* e si ha:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Esempio

$$f(x)=\frac{x^3}{1+x^4}$$

$$Df(x)=\frac{Dx^3\cdot\left(1+x^4\right)-x^3\cdot D\left(1+x^4\right)}{\left(1+x^4\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\cdot\left(1+x^4\right)-x^3\cdot 4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}=\frac{3x^2-x^6}{\left(1+x^4\right)^2}$$

Derivata delle funzioni composte

- Teorema. Siano la funzione *g* derivabile in *x* e la funzione *f* derivabile in *g(x)*. Allora la funzione composta è derivabile in *x* e si ha:

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

- si inizia a derivare l'ultima funzione applicata (generalizzabile alla composizione di più di due funzioni).

- l'ordine di derivazione è fondamentale.

Esempi

- 1.

$$y = \log\sqrt{x}$$

$$x \xrightarrow{\sqrt{.}} \sqrt{x} \xrightarrow{\log} \log\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

Esempi

- 2.

$$y = \log^3 \sqrt{x}$$

$$x \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \sqrt{x} \xrightarrow{\log} \log \sqrt{x} \xrightarrow{\cdot^3} \log^3 \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y' = 3\log^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\log^2 \sqrt{x}}{2x}$$

Esercizi

- Verificare se le seguenti funzioni soddisfano le relazioni indicate:

1. $f(x)=e^{-x} \rightarrow f(0)+x\cdot f'(0)\overset{?}{=}1-x$

$$e^{-0}+x\cdot(-1\cdot e^{-0})=1-x$$

2. $f(x)=a\cdot e^{-x} \rightarrow f'(x)+f(x)\overset{?}{=}0$

$$f'(x)=a\cdot(-1\cdot e^{-x})=-a\cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow f'+f=-a\cdot e^{-x}+a\cdot e^{-x}=0$$

Esercizi

1. derivare

$$y = \log \frac{1}{x+1} = \log(x+1)^{-1} = -\log(x+1)$$

$$y' = -\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x+1}$$

Esercizi

2. derivare $y = e^{3x} \cdot (1 + x^3)$

$$y' = (e^{3x})' \cdot (1 + x^3) + e^{3x} \cdot (1 + x^3)' =$$

$$= 3e^{3x} \cdot (1 + x^3) + e^{3x} \cdot 3x^2 =$$

$$= 3e^{3x} \cdot (1 + x^2 + x^3)$$

3. derivare $y = (1 - x^2)^{10}$

→ regola generale: $D[f(x)]^n = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

Esercizi

si ottiene:

$$y' = 10 \cdot (1 - x^2)^9 \cdot (-2x) = -20 \cdot x \cdot (1 - x^2)^9$$

4. derivare: $$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

$$y' = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} =$$

$$= -4\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

Esercizi

5. derivare:

$$D[e^x \cdot (1-x^2)] = e^x \cdot (1-x^2) + (-2x) \cdot e^x =$$
$$= e^x \cdot (1-2x-x^2)$$

Esercizi

Scrivere l'equazione della tangente alla parabola di equazione $y = 3x^2 - 5x + 7$

nel punto di ascissa $x_0 = 2$

Forma generale: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$$x_0 = 2$$
$$f(x_0) = f(2) = 9$$
$$f'(x) = 6x - 5 \rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 7$$

per cui:

$$y - 9 = 7(x - 2) \Rightarrow y = 7x - 5$$

Esercizi

- Scrivere l'equazione della tangente a

$$y = f(x) = 2x + x^3 + 1$$

nel punto di ascissa *c=0*

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2 + 3x^2 \rightarrow f'(0) = 2$$

$$\Rightarrow y = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0)$$

$$\Rightarrow y = 2x + 1$$