Studio Massimi e Minimi Relativi

Crescenza e decrescenza

- La funzione $f(x)$ è crescente in *c* se esiste un intorno di *c* tale che:

$$f(c+\Delta x) > f(c) \quad \text{con} \quad \Delta x > 0$$
$$f(c+\Delta x) < f(c) \quad \text{con} \quad \Delta x < 0$$

- La funzione $f(x)$ è decrescente in *c* se esiste un intorno di *c* tale che:

$$f(c+\Delta x) < f(c) \quad \text{con} \quad \Delta x > 0$$
$$f(c+\Delta x) > f(c) \quad \text{con} \quad \Delta x < 0$$

Condizioni equivalenti:

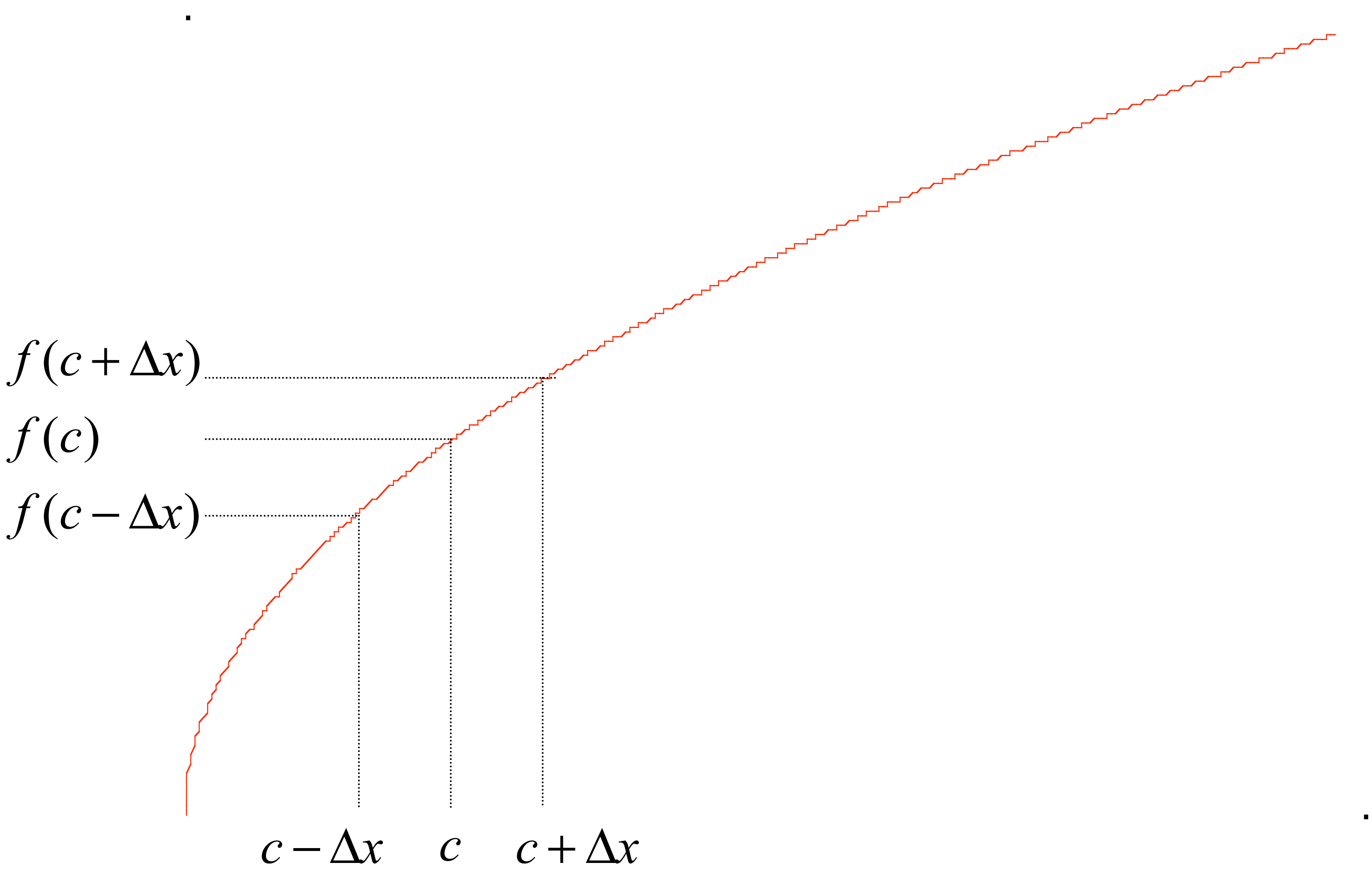
→ $f(x)$ crescente:

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta y > 0 & \text{con} & \Delta x > 0 \\ \Delta y < 0 & \text{con} & \Delta x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

→ $f(x)$ decrescente:

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta y < 0 & \text{con} & \Delta x > 0 \\ \Delta y > 0 & \text{con} & \Delta x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

Graficamente: crescenza



Crescenza e decrescenza per funzioni derivabili

- Teorema. Se $f(x)$ è derivabile in *c* con $f'(c) > 0$ allora $f(x)$ è crescente in *c.*

- Teorema. Se $f(x)$ è derivabile in *c* con $f'(c) < 0$ allora $f(x)$ è decrescente in *c.*

dimostrazione:

Si ha per ipotesi: $f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$

applicando il teorema della permanenza del segno

Crescenza e decrescenza per funzioni derivabili

si può determinare un intorno di *c* tale che

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

ossia *f* è crescente in *c.*

Per la decrescenza si ragiona in modo analogo.

Osservazione importante: non vale il viceversa. Si ha infatti:

Crescenza e decrescenza per funzioni derivabili

- Se $f(x)$ è derivabile in *c* e se $f(x)$ è crescente in *c* allora si ha:

$$f'(c) \geq 0$$

- Se $f(x)$ è derivabile in *c* e se $f(x)$ è decrescente in *c* allora si ha:

$$f'(c) \leq 0$$

- Stessi enunciati per funzioni derivabili in un intervallo (o nel dominio).

Esempio: $y = x^3$

è crescente in ogni punto, anche nell'origine dove si ha

$$y'(0) = 0$$

Massimi e minimi relativi

- Definizioni

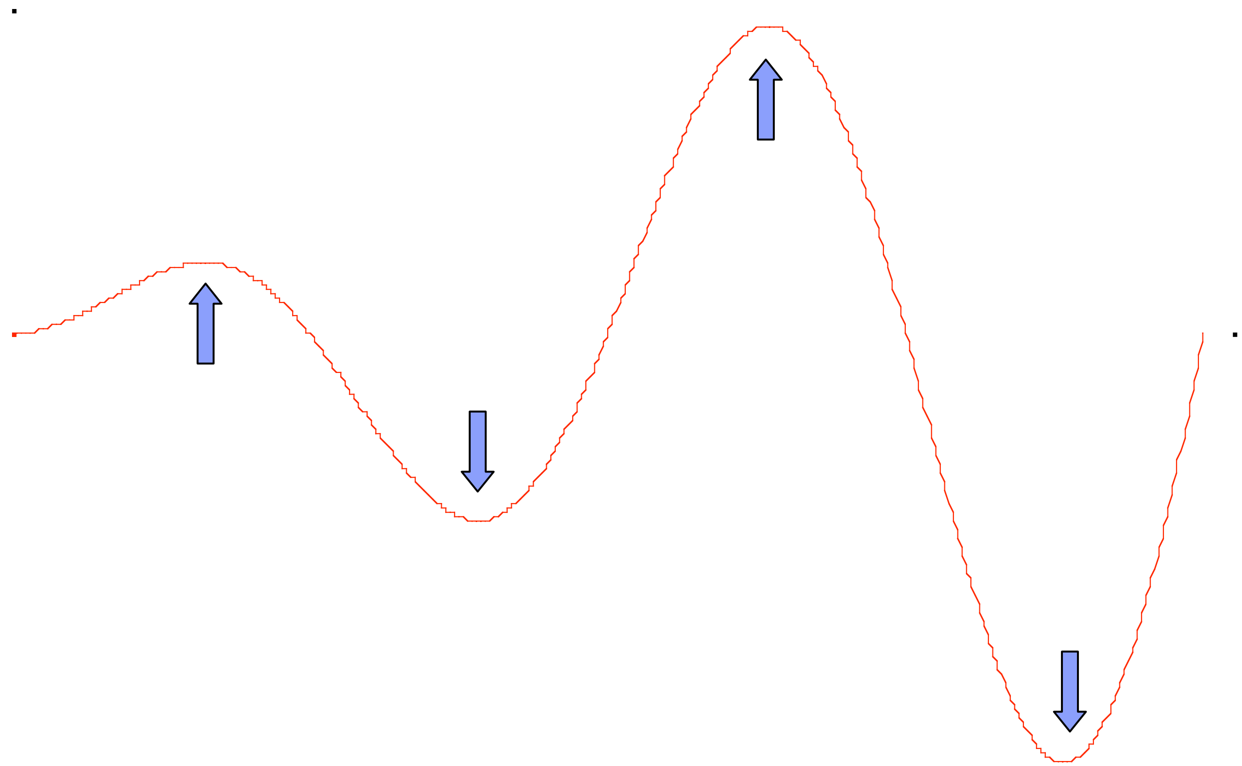
Il punto *c* è un massimo relativo per $f(x)$ se esiste un intorno di *c* tale che:

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in I(c)$$

Il punto *c* è un minimo relativo per $f(x)$ se esiste un intorno di *c* tale che:

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in I(c)$$

Graficamente



Massimi e minimi relativi per funzioni derivabili

- Teorema (condizione necessaria). Se nel punto *c* la funzione f è derivabile e possiede un estremo relativo allora $f'(c)=0$

Dimostrazione:
Non potrà essere $f'(c)>0$ (implica la crescenza) neanche $f'(c)<0$ (implica la decrescenza). Si ha quindi la tesi.

Osservazione. I punti che annullano la derivata si chiamano punti stazionari (la tangente al grafico è orizzontale).

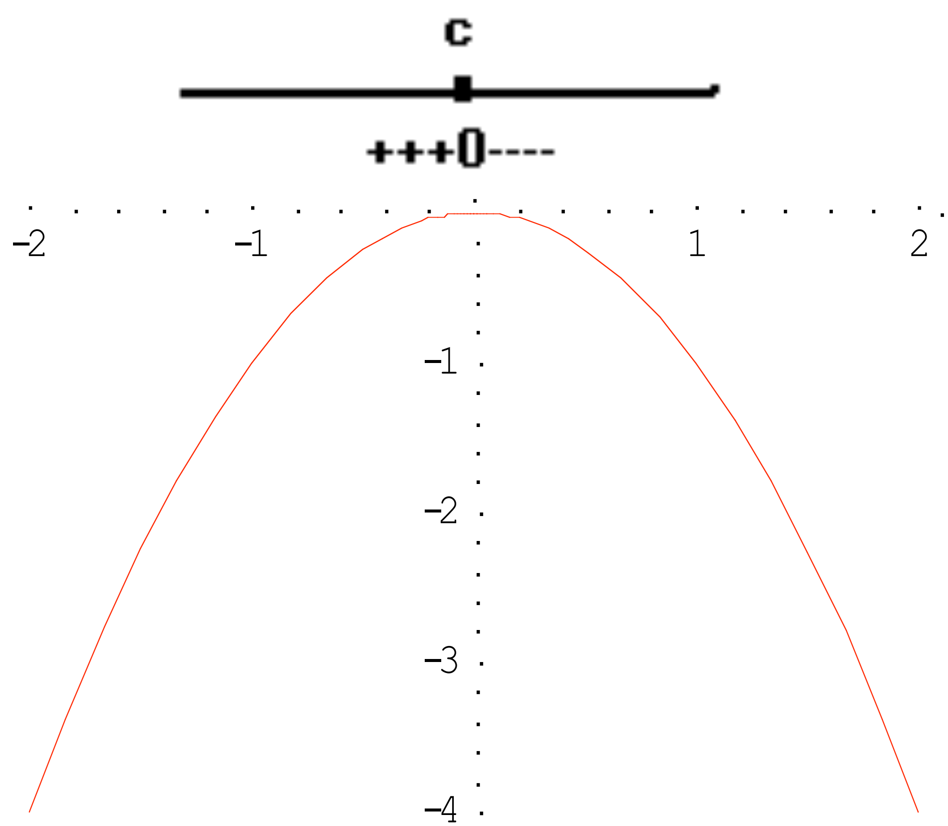
Massimi e minimi relativi per funzioni derivabili

- Non tutti i punti stazionari sono estremi relativi. Servono delle condizioni sufficienti:

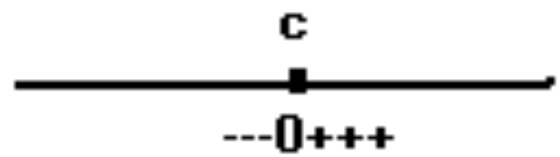
- Teorema. Sia f derivabile nel punto *c* con *c* punto stazionario. Se la derivata cambia segno in un intorno del punto *c* allora *c* è un estremo relativo. Altrimenti si ha un flesso a tangente orizzontale

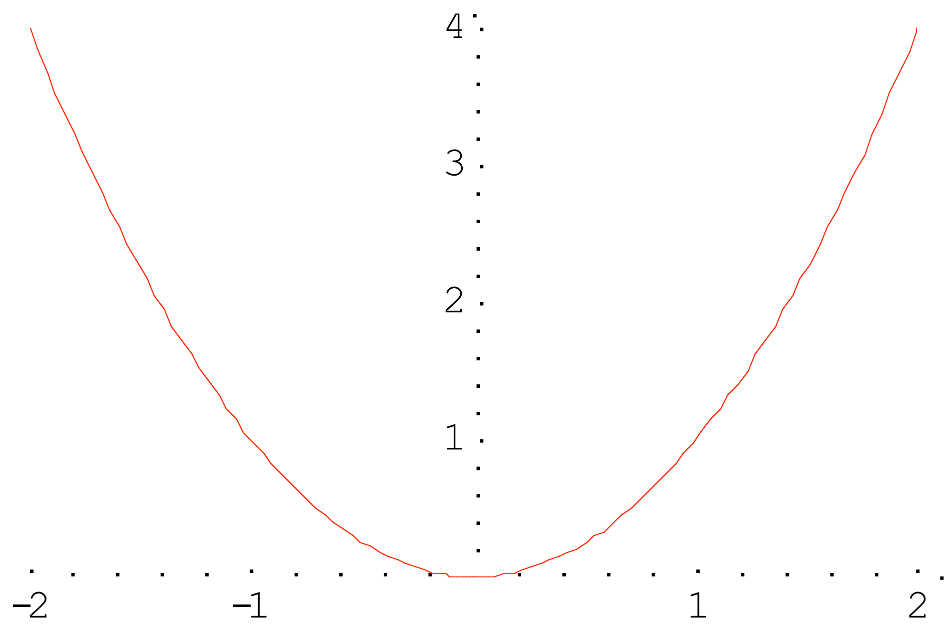
- Studio locale dei punti stazionari:

Massimo relativo

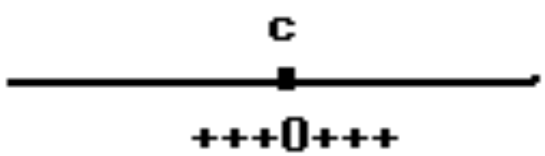


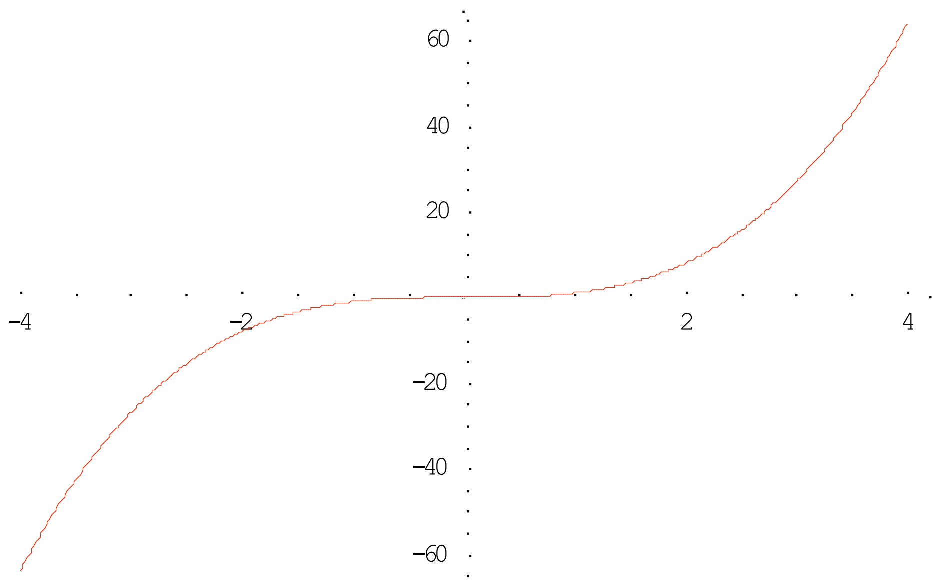
Minimo relativo



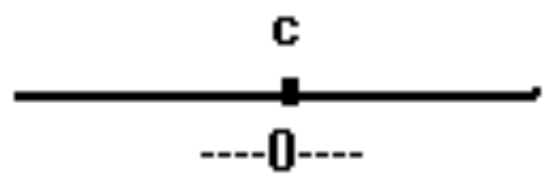


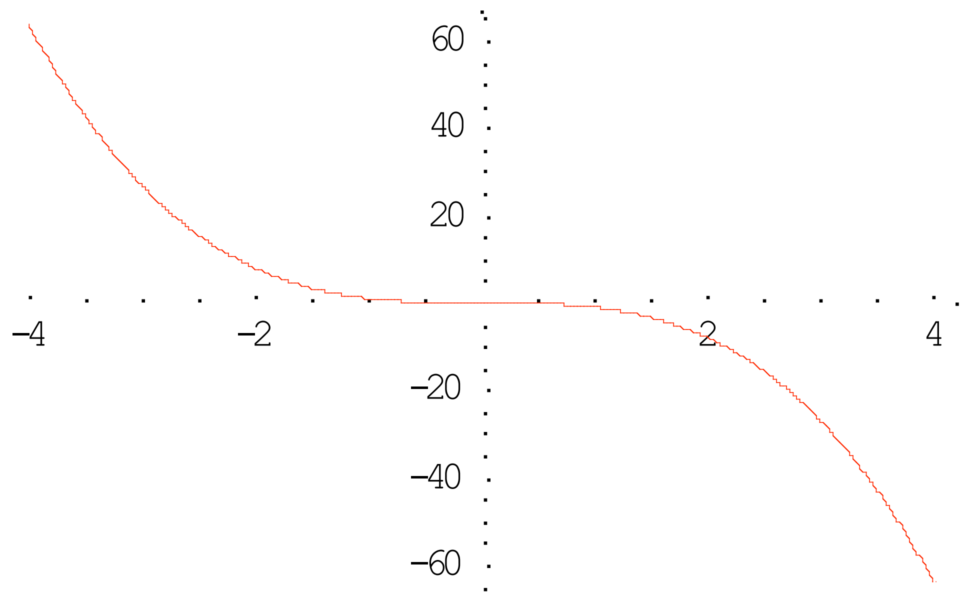
Flesso a tangente orizzontale ascendente





Flesso a tangente orizzontale discendente





- Anziché studiare la derivata prima nell'intorno di un punto stazionario, possiamo calcolare il valore della derivata seconda nel punto.

Condizioni sufficienti del secondo ordine:

- Teorema. Sia *c* un punto stazionario per f e supponiamo che esista $f''(c)$
- Se $f''(c) > 0$ si ha un minimo
- Se $f''(c) < 0$ si ha un massimo