Concavita` e Convessita`

Concavità e convessità

- Una funzione *f* è **convessa** in un intervallo *A* se:

  Presi due punti dell'intervallo il grafico della funzione sta sotto la retta congiungente i due punti

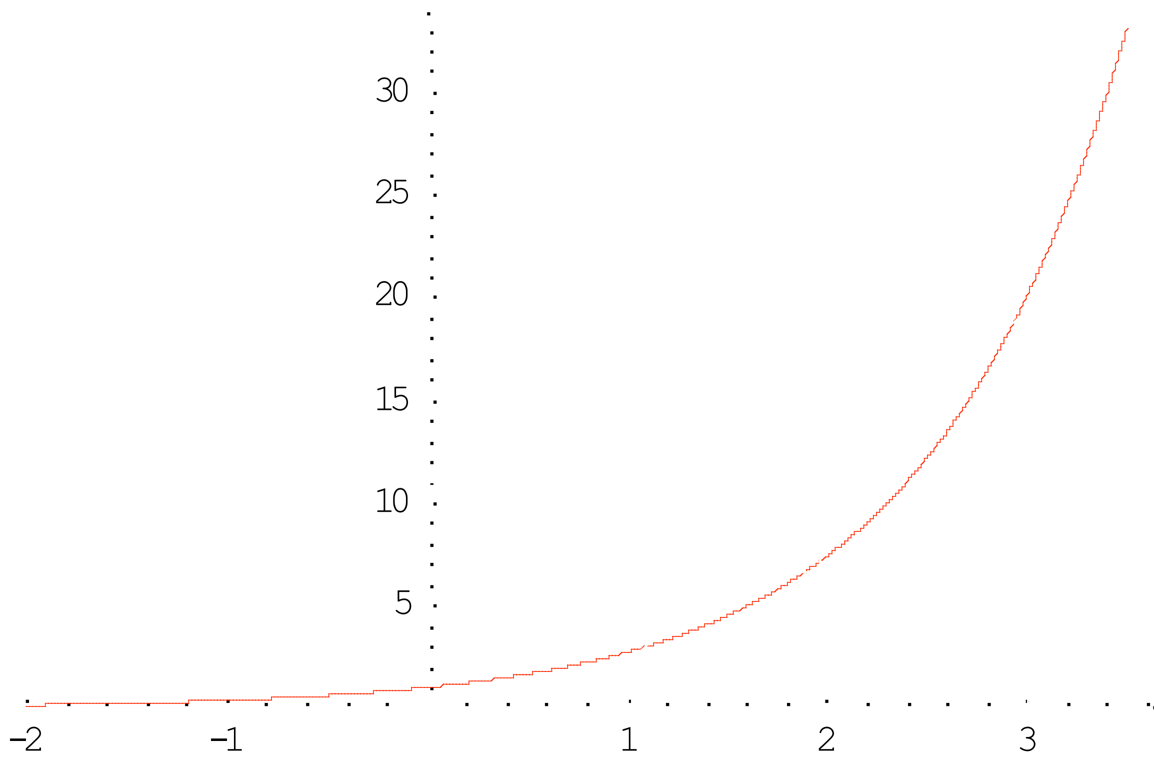
$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

- **concava** se:

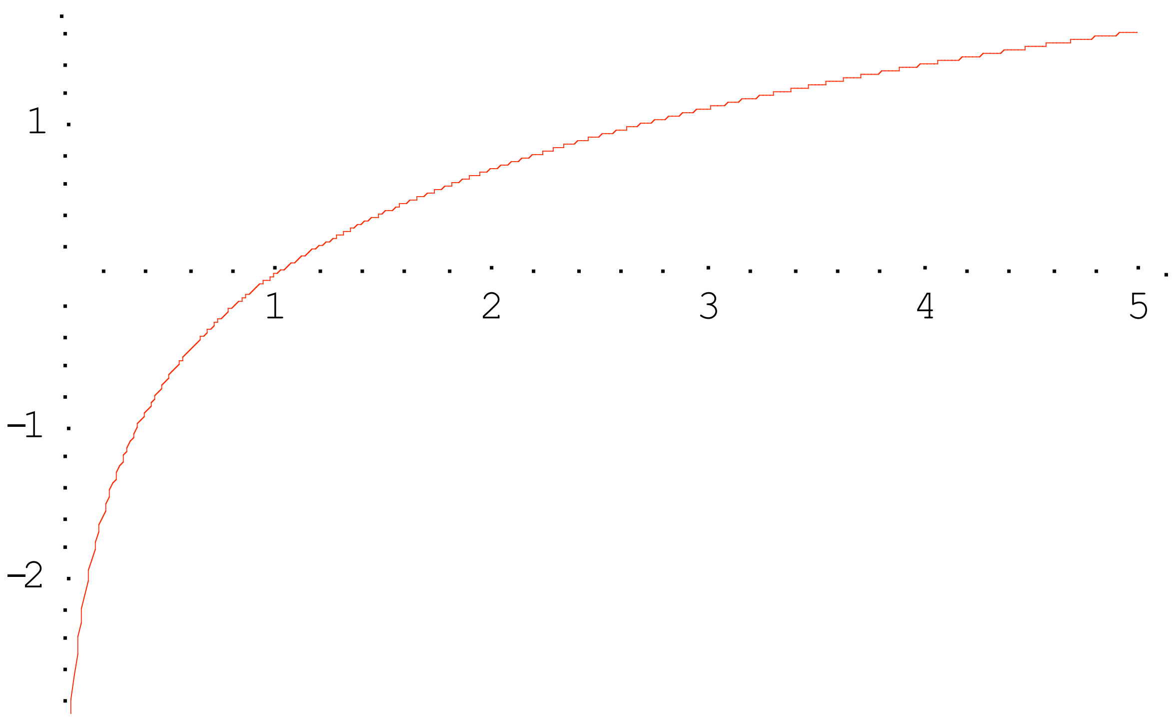
  Presi due punti dell'intervallo il grafico della funzione sta sopra la retta congiungente i due punti

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Funzione convessa



Funzione concava



Concavità e convessità

- Concavità e convessità sono legate al segno della derivata seconda.

- Teorema (condizione sufficiente). Se f'' è positiva in un punto (intervallo) allora la funzione è convessa nel punto (intervallo).

- Teorema (condizione sufficiente). Se f'' è negativa in un punto (intervallo) allora la funzione è concava nel punto (intervallo).

Concavità e convessità

- Osservazione: non vale il viceversa. Difatti
- Teorema. Se f è convessa in un punto ed esiste la derivata seconda, allora essa è non negativa (può anche annullarsi).
- Teorema. Se f è concava in un punto ed esiste la derivata seconda, allora essa è non positiva (può anche annullarsi).

Punti di flesso

- Se in un punto la derivata seconda si annulla, cambiando segno in un intorno di quel punto, si ha un cambio di concavità, ossia un punto di flesso.

Punti di flesso

- Si può dimostrare che se in un punto di flesso esiste la derivata seconda, essa si annulla

→ l'annullarsi della derivata seconda è una condizione NECESSARIA ma NON sufficiente per l'esistenza dei punti di flesso.

Punti di flesso

- Teorema. Se la prima derivata non nulla ha ordine pari allora si ha un estremo. Se invece ha ordine dispari, si ha un flesso.

Studio Locale dei Punti di Flesso

- Flesso a tangente orizzontale ascendente

c

f' ++++0+++++

f'' -------0+++++

- Flesso a tangente orizzontale discendente

c

f' -------0-------

f'' ++++0------