Teoremi Fondamentali sulle Funzioni Derivabili

Teorema di ROLLE

- Ipotesi: sia *y=f(x)* continua in *[a,b]* e derivabile in *(a,b)* con *f(a)=f(b)*.

- Tesi: $\exists c \in (a,b) \quad \text{con} \quad f'(c)=0$

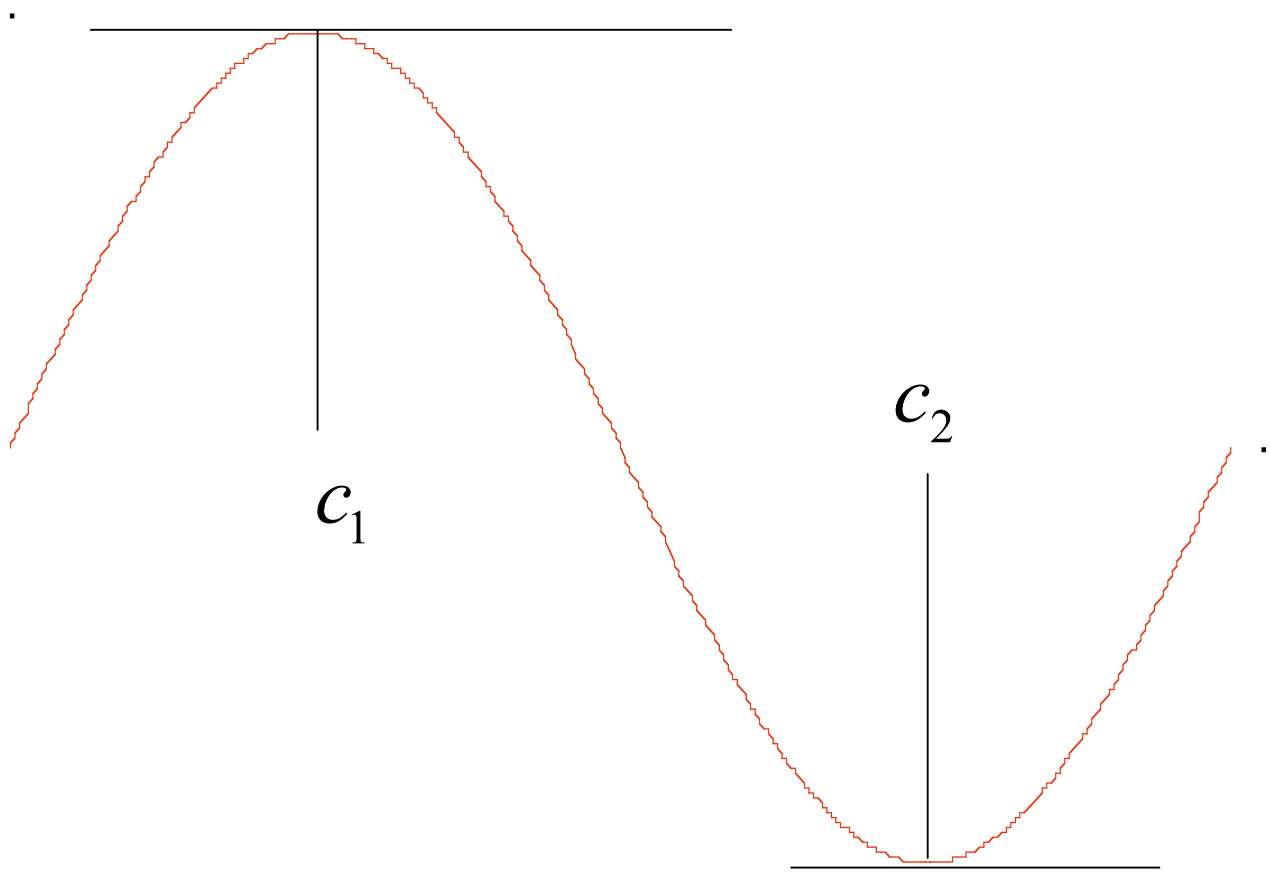
Dimostrazione (facoltativa).
Se la funzione è costante *f(x)=k* il teorema è banalmente vero essendo:

$$f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Se la funzione non è costante, per il teorema di Weierstrass ammette minimo e massimo assoluto in *[a,b]* di cui almeno uno in *(a,b)*. Poiché la *f(x)* è derivabile in *(a,b)* allora avremo almeno un punto in cui $f'=0$.

- Graficamente: sotto queste ipotesi, esiste almeno un punto del grafico con tangente orizzontale.

Graficamente



Esempio

- Sia $y = f(x) = x^3 - x$ nell'intervallo *[-1,1]*. La *f(x)* è continua in *[-1,1]* e derivabile in *(-1,1)*. Inoltre si ha *f(-1)=f(1)=0* → soddisfatte le ipotesi.

$$\Rightarrow \exists c \in (-1,1) \quad \text{con} \quad f'(c) = 0$$

$$f'(c) = 3c^2 - 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Teorema di CAUCHY

- Ipotesi: Siano *y=f(x)* e *y=g(x)* continue in *[a,b]* e derivabili in *(a,b)* con

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

- Tesi: $\exists c \in (a,b) \quad \text{con} \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

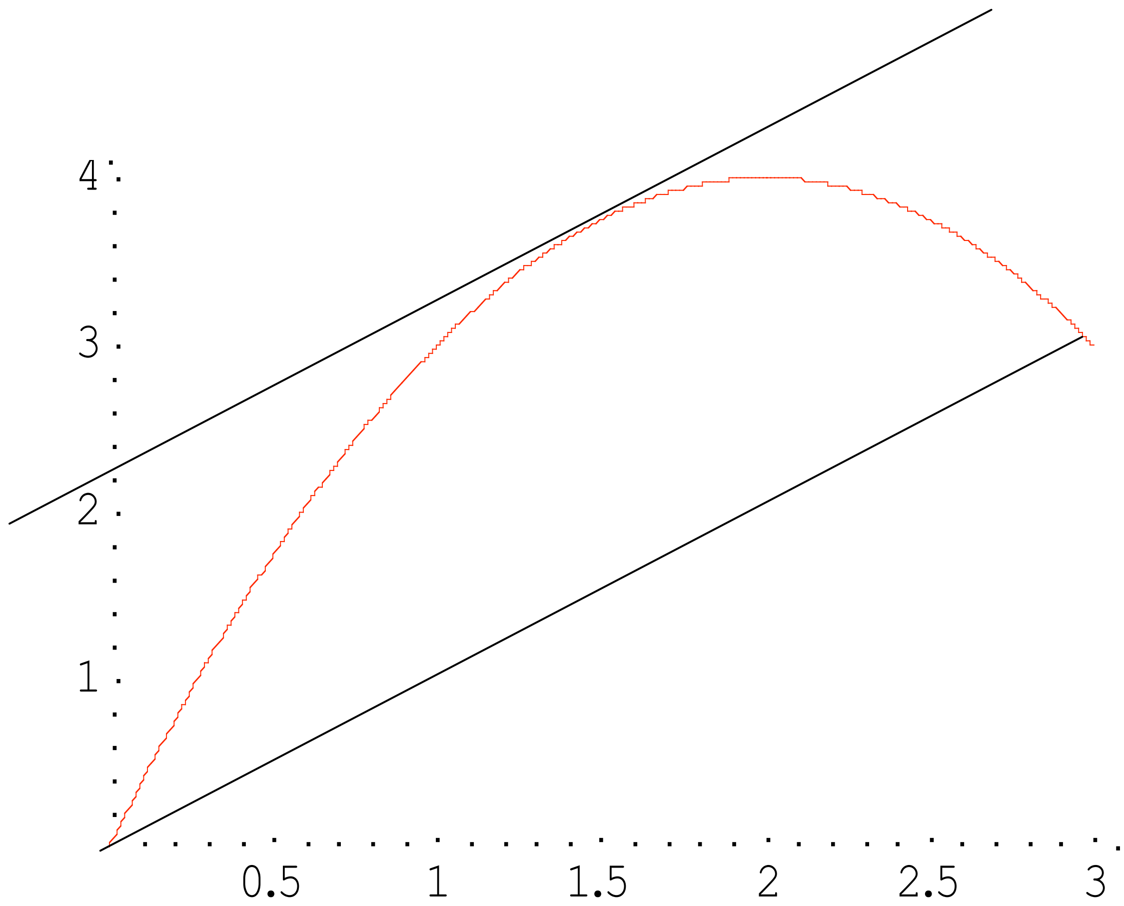
Teorema di LAGRANGE (o del valor medio)

- Ipotesi: sia *y=f(x)* continua in *[a,b]* e derivabile in *(a,b)*

- Tesi: $\exists c \in (a,b) \quad \text{con} \quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

- Geometricamente: esiste almeno un punto del grafico per il quale la tangente è parallela alla retta congiungente *(a;f(a))* e *(b;f(b)).*

Graficamente



Esempio

$$y = \log x, \quad x \in [1, e]$$

$$\frac{f(e) - f(1)}{e-1} = \frac{\log e - \log 1}{e-1} = \frac{1}{e-1} = f'(c) = \frac{1}{c}$$

$$c = e - 1 \in (1, e)$$

Esempio

Data la funzione $y = x^4$, verificare se esiste almeno un punto interno a *[-1,2]* nel quale la derivata eguaglia il rapporto incrementale.

La funzione è continua in *[-1,2]* e derivabile in *(-1,2)* quindi per il teorema di Lagrange, posto

$$a = -1, b = 2, c = x_0$$

Si ha che:

$$\exists c \in (a,b) \quad \text{con} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = 4c^3$$

$$\Rightarrow 4c^3 = \frac{15}{3} \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

Teorema di DE L'HOSPITAL

- Si applica alla risoluzione di limiti che si presentano nelle forme indeterminate seguenti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Siano *f(x)* e *g(x)* derivabili in un intorno di *c* (o infinito), con $g'(x) \neq 0$ nell' intorno di x_0 (o infinito), e supponiamo

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Se esiste $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e i due limiti sono uguali.

Esempio

- Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{0}{0}$$

- Calcoliamo il limite del quoziente delle derivate:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$$

- Di conseguenza esiste anche il primo limite e vale 1

Esempio

- Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

- Quindi il limite cercato vale 1

Esempio

- Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot(1+x)^{a-1}}{1}=a$$

- Quindi il limite cercato vale *a*

Osservazioni

- La condizione del teorema è solo sufficiente, ma non necessaria.

- La regola può essere applicata ripetutamente alle derivate successive se il limite del quoziente delle derivate presenta ancora una forma indeterminata.

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots.$$

Osservazioni

- Una forma indeterminata

$$\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty$$

Si può ricondurre alla forme precedenti osservando che:

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \Rightarrow \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Esempio

- Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\log x}$$

avremo:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x\cdot\log x\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

Esempio

- Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\log(x^3+1)}$$

- avremo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\log(x^3+1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^3+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(x^3+1)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Le forme indeterminate

$$0 \cdot \infty, \; 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

sono dunque riconducibili a forme del tipo:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

e quindi risolvibili con de l'Hospital