Teoremi Fondamentali sui Limiti

Teorema di Unicita` del Limite

Se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

$$x_0, l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

allora tale limite è unico.

Dimostrazione:

Dalla ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Se si suppone (per assurdo) che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l' \quad \text{con } l' \neq l$$

Allora

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$$

$$\text{Se } |x - x_0| < \delta \text{ e } |x - x_0| < \delta' \quad \text{si avra\` quindi}$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f(x) - l'| < \varepsilon, \text{ ovvero}$$

$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \quad \text{e} \quad -\varepsilon < l' - f(x) < \varepsilon$$

Sommando membro a membro:

$$-2\varepsilon < l' - l < 2\varepsilon$$

che per l'arbitrarieta` di ε implica: $l' - l = 0 \Rightarrow l' = l$

che e` assurdo.

Teorema della Permanenza del Segno

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$

allora esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 tale che per ogni

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \text{ ha stesso segno di } l.$$

- Nulla si puo` dire nel caso *l=0*
- Il teorema e` un teorema locale

Teorema del Confronto

Siano $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che $f(x) \leq g(x)$ in un opportuno Intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0

Supponiamo che esistano finiti $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

Allora $l \leq m$

Inoltre: $l = +\infty \Rightarrow m = +\infty$ e $m = -\infty \Rightarrow l = -\infty$

Esempio:

le funzioni $f(x) = x^{\alpha}, \alpha > 1$ sono divergenti positivamente per $x \to +\infty$ in quanto maggioranti la funzione $f(x) = x$.

Dimostrazione Teor. Permanenza del Segno:

Supponiamo $l > 0$. Per ipotesi: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Poiche` $l > 0$, e` sempre possibile scegliere $\varepsilon > 0$

tale che $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ e` fatto di tutti valori positivi.

Di conseguenza:

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ x \neq x_0 \ \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

e dunque $f(x) > 0$

Teorema dei Carabinieri

Se in un intorno completo di x_0 si ha: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$ si ha: $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$