Esercizi sui limiti

Alcuni limiti di funzioni elementari

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty \qquad \lim_{x \to 0^\pm} x^3 = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x^3} = \pm\infty$$

Alcuni limiti di funzioni elementari

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x}\to\nexists \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0 \qquad \lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}\sqrt{x}\to\nexists \qquad \lim_{x\to0^-}\sqrt[3]{x}=0$$

Alcuni limiti di funzioni elementari

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \log x = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \log x \to \nexists$$

$$\lim_{x \to 1^-} \log x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \log x \to \nexists$$

Alcuni limiti di funzioni elementari

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^x = 1$$

Limiti immediati

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 6} = \frac{0 + 3}{0 - 6} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x}{x - 2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + 2\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x}} = \frac{1 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - \log(x + 1)}{3 \cdot 2^x - \sqrt{4 - x}} = \frac{1 - 0}{3 \cdot 1 - 2} = 1$$

Limiti immediati

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e}{0}=\pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x}{x-1}=+\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x}{x-1}=-\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\log(x+1)}{(x-1)^4}=\frac{-\log 2}{0}=-\infty$$

Limiti immediati

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 4}{2^{-x}} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^{-x}}{x^4 + 3x^2 + 5} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^3 + x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^4 + x^2}{\log x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Rapporto tra 2 polinomi: limite a infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+2x^2-x+4}{x^2-3x+7}=\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(4x+2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

- Regola generale: mettere in evidenza il piu` piccolo tra i due termini di grado massimo

Rapporto tra 2 polinomi: limite a infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+7}{4x^3+2x^2-x+4}=\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(4x+2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

- Regola generale: mettere in evidenza il piu` piccolo tra i due termini di grado massimo

Rapporto tra 2 polinomi: limite a infinito

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\boxed{2}x^3 - 3x + 7}{\boxed{4}x^3 + 2x^2 - x + 4} = \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \cdot \left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Regola generale: mettere in evidenza il piu` piccolo tra i due termini di grado massimo

Rapporto tra 2 polinomi: limite a zero

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+2x^2}{x^2-3x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(4x^2+2x\right)}{x\cdot\left(x-3\right)}=\frac{0}{-3}=0$$

- Regola generale: mettere in evidenza il piu` piccolo tra i due termini di grado minimo

Rapporto tra 2 polinomi: limite a zero

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{4x^3+2x^2-x}=\frac{0}{0}=$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{x\cdot\left(x-3\right)}{x\cdot\left(4x^2+2x-1\right)}=\frac{-3}{-1}=3$$

- Regola generale: mettere in evidenza il piu` piccolo tra i due termini di grado minimo

Rapporto tra 2 polinomi: limite a zero

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-3x}{x^3+2x^2}=\frac{0}{0}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(2x^2-3\right)}{x\cdot\left(x^2+2x\right)}=\frac{-3}{0}=\infty$$

- Regola generale: mettere in evidenza il piu` piccolo tra i due termini di grado minimo

Forme indeterminate

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{4x^2-3}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{|x|\cdot\sqrt{\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Forme indeterminate

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+3}{\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\infty+\infty}=0$$

Forme indeterminate

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x-3}\right)=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x-3}\right)\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x-3}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x-3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-x+3}{\left(x+\sqrt{x^2+x-3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\dfrac{3}{x}}{\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}\right)}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

Forme indeterminate

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}=$$

$$\lim_{x\to5}\frac{x-1-4}{x-5}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x-1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{0}=\infty$$