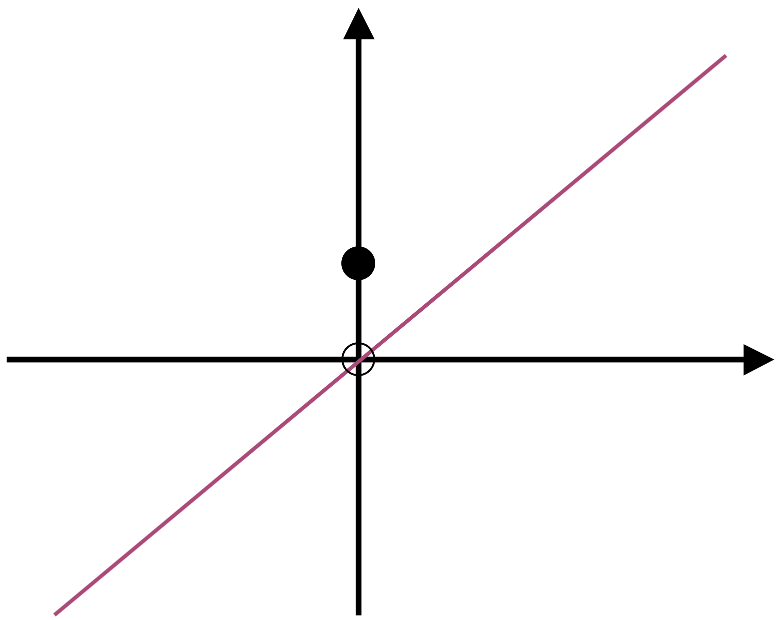
Continuità e Discontinuità

Continuita`

- Definizione di continuita`: una funzione e` continua in un punto c se il valore f(c) che la funzione assume nel punto c coincide con il limite della funzione per x che tende a c.

- Esempio di discontinuita`:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



Continuità in un punto

La funzione $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua nel punto $x_0 \in A \cap D(A)$ se

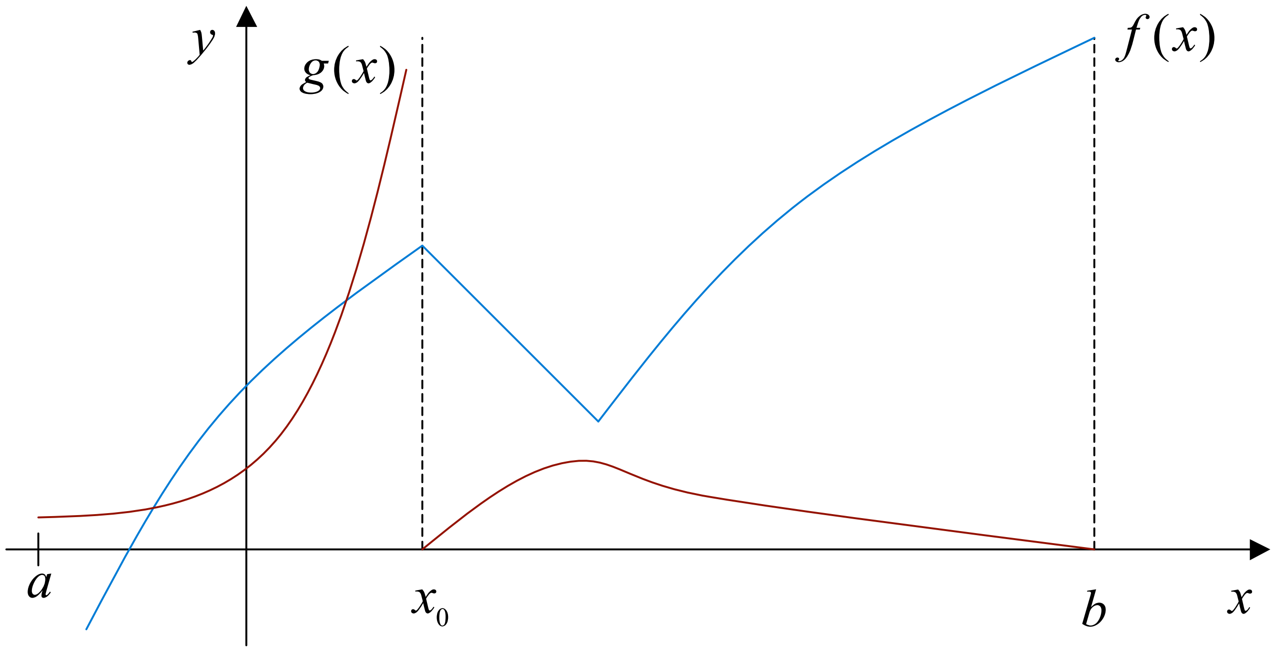
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ossia il limite della funzione nel punto x_0 esiste e tale limite coincide con il valore che la funzione assume nel punto.

- Geometricamente: il grafico di *f* e` privo di "salti". Attenzione alle semplificazioni grafiche!

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Interpretazione Grafica



La $f(x)$ è continua in (a,b)

La $g(x)$ non è continua in (a,b)

Continuità a destra e sinistra

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ continuita` da sinistra

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ continuita` da destra

Esempio (continuita` da dx): $f(x) = [x] := \max\{n \in \mathbb{N} : x \geq n\}$

Esempio (continuita` da sx): $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

Proprieta: f e` continua in $x_0$ sse $f$ e` continua sia da destra che da sinistra in x_0

- $f(x)$ è continua in (a,b) se è continua $\forall x \in (a,b)$;
- $f(x)$ è continua in $[a,b]$ se è continua in (a,b) ed inoltre è continua da destra in a e da sinistra in b

Classificazione delle discontinuita`

Un punto in cui f e` discontinua si dice "punto di discontinuita`".

1. Discontinuita` eliminabile: se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases} \quad \text{e` continua}$$

Esempio (eliminabile):

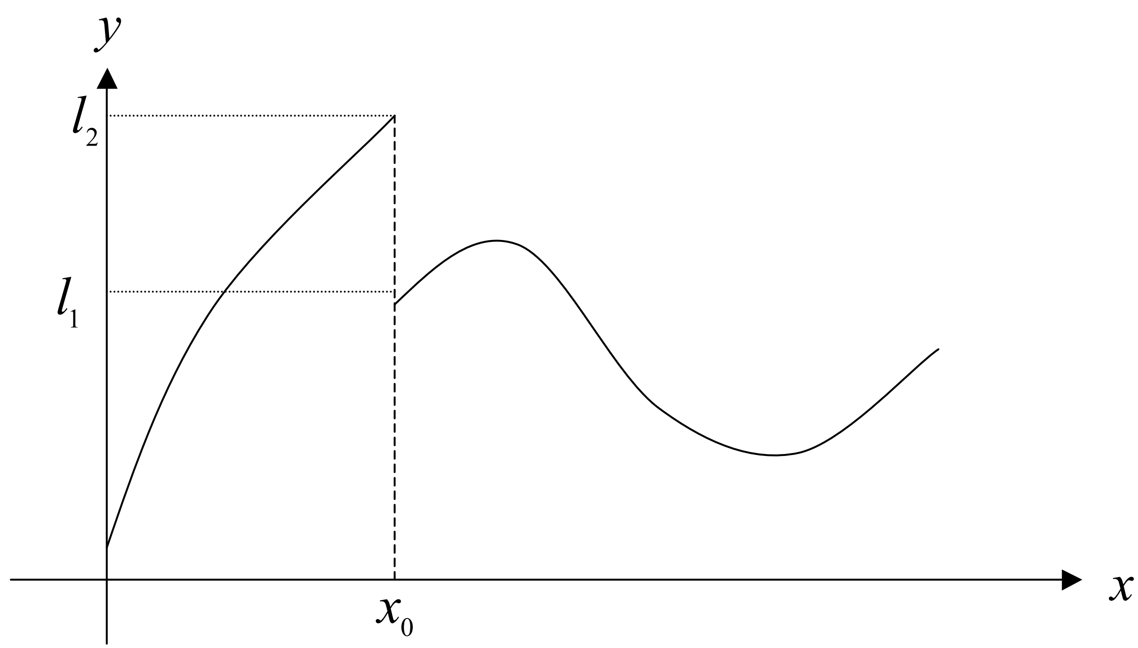
$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Esempio (ineliminabile):

$$f(x) = [x]$$

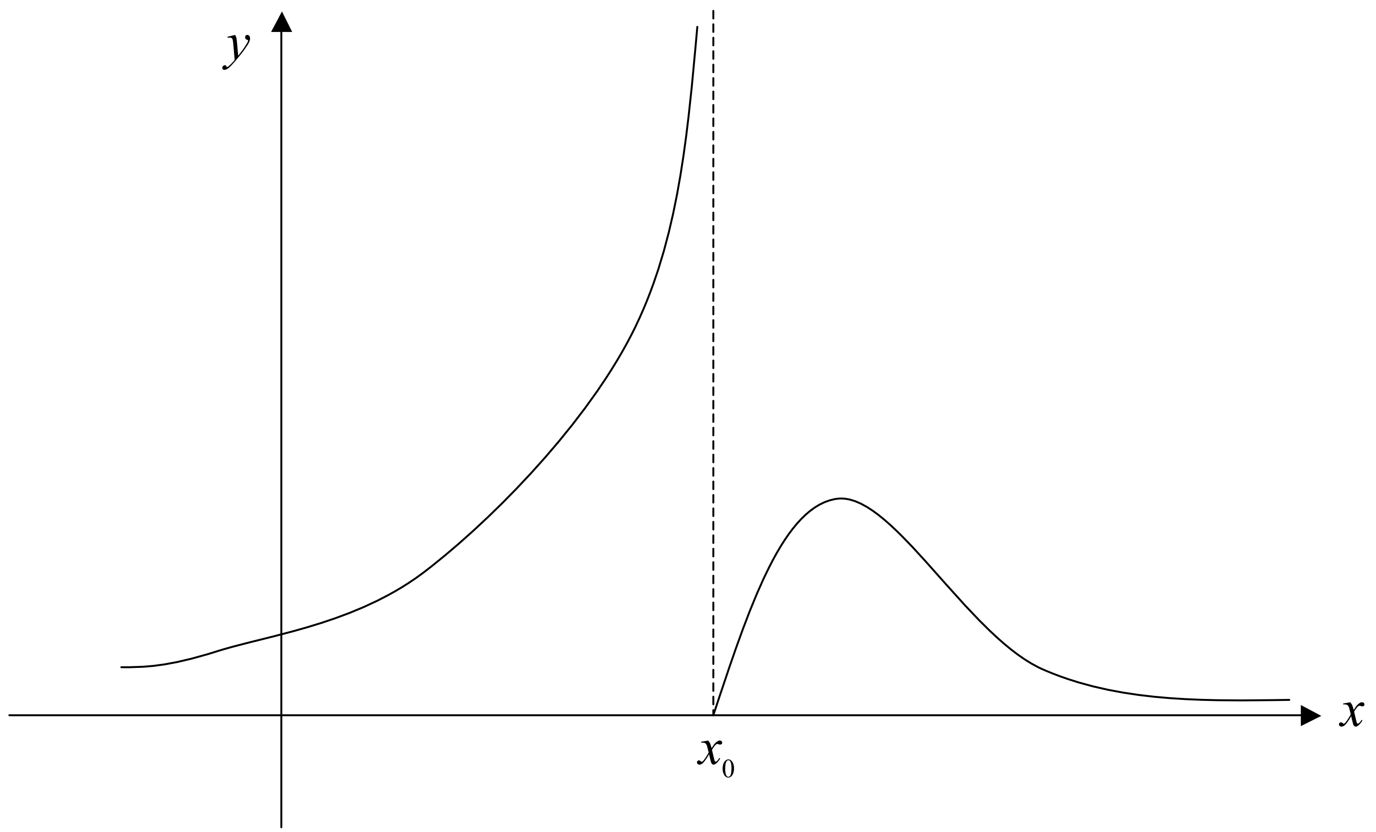
2. Discontinuita` di prima specie (di salto):

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \quad \text{(entrambi finiti)}$$



3. Discontinuita` di terza specie (essenziale)

Almeno uno tra i limiti destro o sinistro non esiste o e` infinito



Classificazione Discontinuita`

- Esempi

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$ non eliminabile

$$\left. \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{1-2^{1/x^2}} \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-2^{1/x^2}} = 0 \end{array} \right\}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{la discontinuità potrà essere} \\ \text{eliminata ponendo } f(0) = 0: \end{array} \right.$

Continuita` Funzioni Elementari

- Le seguenti funzioni sono continue in tutto il dominio di definizione:
  - Funzioni costanti
  - Funzioni polinomiali
  - Funzioni razionali
  - Funzioni esponenziali
  - Funzioni logaritmiche
- Inoltre:
  - Somma e prodotto di funzioni continue e` continua
  - Composizione di funzioni continue e` continua

Teoremi Locali Funzioni Continue

- Una funzione continua in un punto e` in particolare convergente nel punto. Si estendono quindi tutti i teoremi sulle funzioni convergenti. Ad esempio:

  - Teorema della Permanenza del Segno:

    Sia f continua in x_0 con $f(x_0) > 0$. Allora esiste un intorno $U(x_0)$ di x_0 tale che $f(x) > 0$ in $\mathrm{U(x_0)}$

Teoremi Globali Funzioni Continue

- I teoremi enunciati finora esprimono proprieta` *locali*. Facendo opportune ipotesi sul dominio, si possono dedurre alcune proprieta` *globali.*

- **Insieme Connesso:**

  L'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e` *connesso* se per ogni $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subset A$

  ($\mathbb{R}$, semirette, intervalli)

- **Insieme Compatto:**

  L'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e` *compatto* se e` chiuso e limitato.

  (intervalli chiusi, unione di intervalli chiusi)

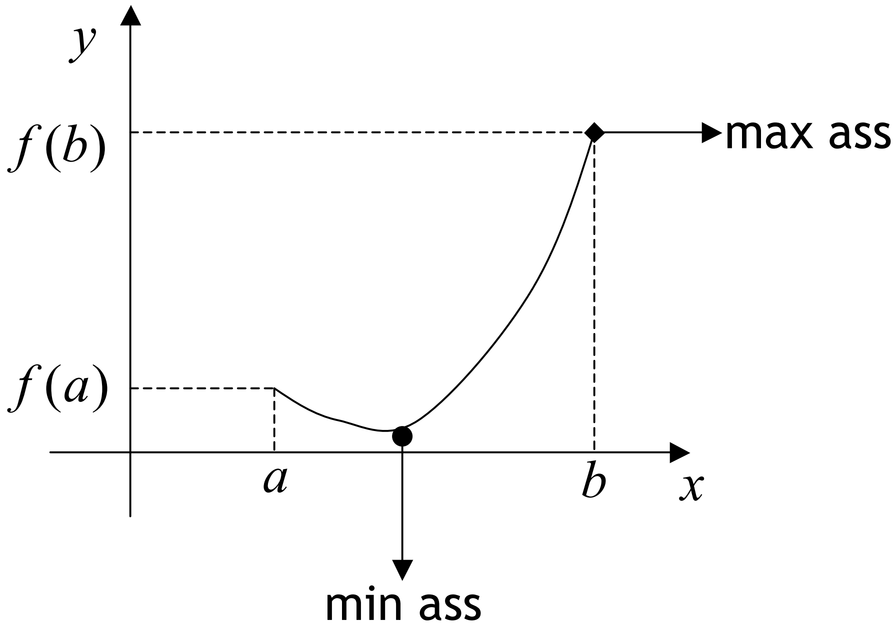
- Teorema di Esistenza degli Zeri

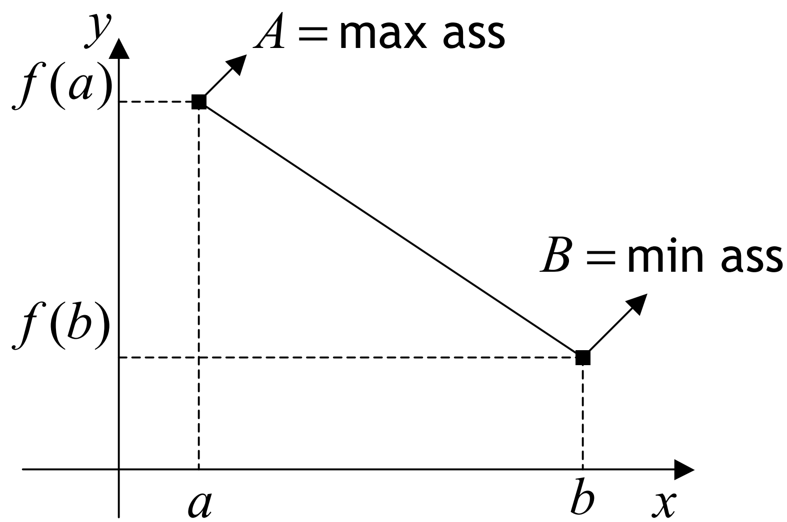
Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua ed A connesso. Se $a,b \in A : f(a)f(b) < 0$
$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = 0$

Applicazione: Ogni equazione polinomiale di grado dispari ha almeno una soluzione.

- Teorema di Weierstrass

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, A compatto $\Rightarrow f$ ha massimo e minimo assoluti in A. Ovvero esistono $x_1, x_2 \in A : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in A$





Controesempio: $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \\ x-2 & x \in (1,2] \end{cases}$ non ha massimo ne\` minimo.

Controsempio: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non ha massimo ne\` minimo.

- Teorema di Continuita` della Funzione Inversa:

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e invertibile, A connesso o compatto $\Rightarrow$
f^{-1} e` continua

Controesempio: $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ x-1 & x \in (2,3] \end{cases}$ e` definita in $[0,1] \cup (2,3]$ che non e` connesso ne` compatto. L'inversa $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ x+1 & x \in (1,2] \end{cases}$ e` discontinua in $x = 1$