CAMPI DI FORZA CONSERVATIVI - ENERGIA POTENZIALE E POTENZIALE ELETTRICO

Campi Vettoriali

Definizione: un campo vettoriale è una regione dello spazio, in cui in ogni punto è definito un vettore.

Tra i campi vettoriali di particolare interesse in fisica vi sono i campi di forza gravitazionale, elettrica e magnetica. Noi tratteremo i campi di forza in generale e infine, il campo elettrico generato da una carica puntiforme ferma.

Lavoro

Definizione: data una particella che si muove lungo una linea in un campo di forza F, da un punto iniziale A verso un punto finale B, si definisce lavoro svolto dalle forze del campo sulla particella che si muove lungo la linea data, la grandezza numerica che si ottiene con le seguenti operazioni:

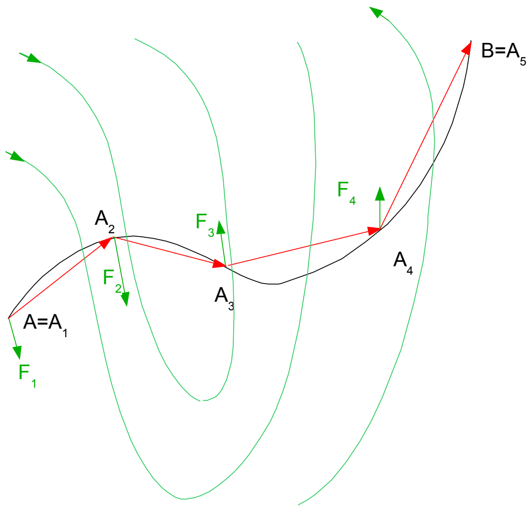
1) muovendosi lungo la linea a partire dal punto iniziale A verso il punto finale B si fissano su di essa arbitrariamente, nell'ordine in cui si incontrano, n+1 punti A_1, A_2, …, A_{n+1} in modo che $A_1=A$ ed $A_{n+1}=B$;

2) si considerano gli spostamenti $\overrightarrow{\Delta S_i} = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ e per ciascuno di essi si prende il vettore del campo in un punto scelto a piacere nel tratto di linea tra i due estremi dello spostamento, che per praticità assumeremo il punto iniziale;

3) indicando con $\vec{F_i}$ il vettore del campo scelto arbitrariamente lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta S_i}$, si svolge la somma di tutti i prodotti scalari tra i vettori forza e i vettori spostamento relativi, ovvero si calcola $\vec{F_1} \cdot \overrightarrow{\Delta S_1} + \vec{F_2} \cdot \overrightarrow{\Delta S_2} + \ldots + \vec{F_n} \cdot \overrightarrow{\Delta S_n}$ che si scrive più sinteticamente così: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \overrightarrow{\Delta S_i}$;

4) si procede ora alla scelta di ulteriori punti lungo la linea orientata e si ripete il procedimento dal punto 1.

Queste operazioni conducono ad un processo senza fine per la natura continua della linea, però, se esiste un numero a cui le somme di sopra si avvicinano sempre più con il procedere delle scomposizioni della linea in tanti spostamenti sempre più piccoli, questo numero è il **lavoro** svolto dalla forze del campo sulla particella che si muove lungo la linea data da A verso B e si indica con $L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds}$.



Osserviamo che il lavoro svolto dalle forze del campo su una particella che percorre una linea in un senso avrà segno opposto a quello svolto dalle forze del campo quando la particella percorre la stessa linea nell'altro senso ovvero $L_{BA} = -L_{AB}$.

Infatti la somma: $$\vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 + \ldots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{S}_n \qquad (\mathbf{1})$$

ottenuta ad un certo passo del procedimento di calcolo del lavoro L_{AB}, invertendo solo il verso di percorrenza della particella, mantenendo la stessa decomposizione della linea e lo stesso vettore forza per ogni tratto di linea, diviene:

$$\vec{F'}_1\cdot\Delta\vec{S'}_1+\vec{F'}_2\cdot\Delta\vec{S'}_2+\ldots+\vec{F'}_n\cdot\Delta\vec{S'}_n \qquad (\mathbf{2})$$

con

$$\vec{F'}_1=\vec{F}_n,\qquad \vec{F'}_2=\vec{F}_{n-1},\qquad \vec{F'}_3=\vec{F}_{n-2},\ldots,\qquad \vec{F'}_n=\vec{F}_1$$ e

$$\Delta\vec{S'}_1=-\Delta\vec{S}_n,\ \Delta\vec{S'}_2=-\Delta\vec{S}_{n-1},\ \Delta\vec{S'}_3=-\Delta\vec{S}_{n-2},\ldots,\ \Delta\vec{S'}_n=-\Delta\vec{S}_1$$

e dunque

$$\vec{F'}_1\cdot\Delta\vec{S'}_1=-\vec{F}_n\cdot\Delta\vec{S}_n,\qquad \vec{F'}_2\,\Delta\vec{S}_2'=-\vec{F}_{n-1}\cdot\Delta\vec{S}_{n-1},\qquad \ldots,\qquad \vec{F'}_n\,\Delta\vec{S'}_n=-\vec{F}_1\cdot\Delta\vec{S}_n$$

in cui si osserva che i termini delle somme (**1**) e (**2**) sono a due a due opposti, per cui la somma (**2**) è esattamente opposta alla somma (**1**) e pertanto anche i lavori sono opposti cioè: $L_{BA}= - L_{AB}$.

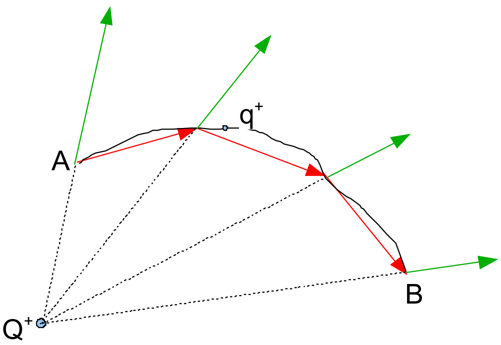
Campi di forza conservativi

Definizione: si dice che un campo di forza è un campo **di forza conservativo** se il lavoro svolto dalle forze agenti su una particella che si muove da un punto A verso un punto B del campo, non dipende dalla traiettoria seguita dalla particella, ma solo dalla posizione iniziale A e da quella finale B.

I campi conservativi che tratteremo sono il campo elettrostatico e gravitazionale. Essi rivestono una particolare importanza in fisica, inoltre per essi esiste una elegante trattazione matematica grazie alla possibilità di definire nel loro interno una funzione scalare dei punti P dello spazio, chiamata rispettivamente potenziale elettrico e potenziale gravitazionale, indicata con *V(p)* , che consente di effettuare una notevole semplificazione dei calcoli inerenti il lavoro svolto dalle forze del campo sulle particelle.

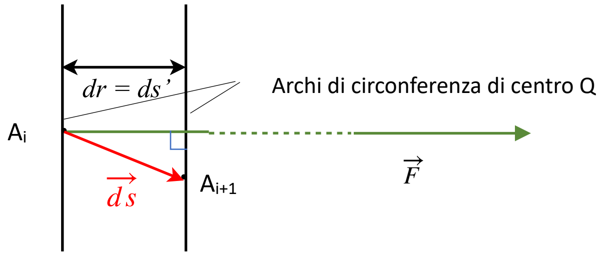
Carattere conservativo dei campi di forze centrali

Definizione: un campo di forze dove tutti i vettori del campo appartengono a rette passanti per uno stesso punto dello spazio (detto centro di forza), aventi tutte il verso diretto nel centro di forza o il verso opposto, e il cui modulo dipende dalla distanza dal centro di forza, è detto **campo di forza centrale**.

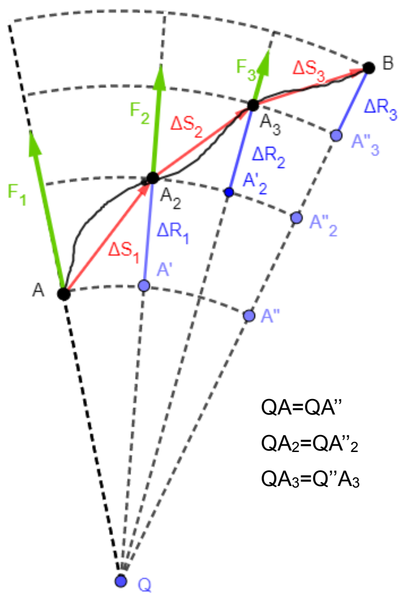


Per esempio il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme Q positiva, è radiale con centro la carica, ed è diretto nel verso che si allontana dalla carica. Questo campo agente su una carica puntiforme q è dunque un campo di forza centrale. Dimostriamo ora che è conservativo. Il ragionamento seguito in questo caso può essere esteso ad ogni campo di forze centrali. Immaginiamo per fissare le idee, senza ledere la generalità, di prendere una carica q positiva e di spostarla da un punto A ad un punto B del campo elettrico generato da una carica puntiforme Q pure positiva, ferma. Mostreremo ora che il lavoro svolto dalle forze del campo sulla carica q non dipende dalla traiettoria seguita da q ma solo dalla posizione iniziale A e finale B, o detto in altri termini, mostreremo che questo campo elettrico è conservativo.

Consideriamo ora il lavoro di un campo di forza centrale su una particella che si sposta tra due punti A e B come la somma di infiniti lavori elementari su spostamenti infinitesimali $\vec{ds}$ (questa è una nuova definizione non standard di lavoro). In uno spostamento infinitesimo il prodotto scalare $\vec{F}\cdot\vec{ds}$ è uguale al prodotto di F (che è costante in ogni punto del tratto elementare considerato) per la componente ds' dello spostamento infinitesimale lungo la direzione radiale di $\vec{F}$. Dalla figura seguente possiamo dedurre che ds' è uguale, a dr, cioè alla differenza tra i raggi delle circonferenze di centro Q passanti per i punti estremi dello spostamento infinitesimale, A_i e A_{i+1}, che su scala infinitesimale appaiono, come dei segmenti perpendicolari al raggio passante per A_i.



Quanto abbiamo appena asserito ci consente di affermare che ogni lavoro infinitesimale $\vec{F} \cdot \vec{ds} = F \cdot ds' = F \cdot dr$, cioè è uguale al prodotto della forza in A_i per la differenza dei raggi dr. Da quanto detto otteniamo $\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_A^B F \cdot dr$ cioè il lavoro sulla particella q svolto dalle forze elettriche del campo quando questa si muove da A a B, essendo la somma di infiniti lavori infinitesimali della forma $F \cdot dr$, dipenderà dalle componenti infinitesimali degli spostamenti lungo le direzioni radiali con centro in Q e dalle forze agenti su ciascun tratto infinitesimale secondo una legge opportuna della distanza dal centro di forza. Il lavoro quindi dipende solo dallo spostamento radiale complessivo da A a B, ovvero da r_A e r_B (r_A = raggio della sfera di centro Q e passante per A, r_B = raggio della sfera di centro Q e passante per B) e dalla legge della forza centrale e non dal cammino percorso. La figura al lato illustra quanto appena detto tenendo presente però che la figura è in scala finita mentre i tratti ΔS sono in realtà infinitesimali così come gli angoli tra le forze e che i tratti ΔS sono in numero infinito. Osservando la figura al lato possiamo affermare che:



$$\vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta S}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta S}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{\Delta S}_3 \approx F_1 \Delta R_1 + F_2 \Delta R_2 + F_3 \Delta R_3$$

e poiché

$$F_1 \Delta R_1 + F_2 \Delta R_2 + F_3 \Delta R_3 = F_1 \overline{A'' A''_2} + F_2 \overline{A''_2 A''_3} + F_3 \overline{A''_3 B}$$

Si ha:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta S}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta S}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{\Delta S}_3 \approx F_1 \overline{A'' A''_2} + F_2 \overline{A''_2 A''_3} + F_3 \overline{A''_3 B}$$

In quest'ultima espressione la prima somma approssima il lavoro lungo la curva da A a B, mentre come si vede, la seconda somma esprime una approssimazione del lavoro lungo il percorso radiale da A'' a B che quindi non dipende dal particolare percorso seguito dalla particella per portarsi da A a B. Si è affermato prima che se gli spostamenti sono infinitesimali le due somme $\sum_{i=1}^{\infty} \vec{F_i} \cdot \vec{ds_i}$ e $\sum_{i=1}^{\infty} F_i \cdot dr_i$ che si scrivono $\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds}$, e $\int_A^B F \cdot dr$, se esistono, sono uguali. Abbiamo così appena osservato che una forza centrale è conservativa, cioè che il lavoro da essa svolto su una particella non dipende dal cammino percorso che congiunge i due punti A e B ma solo dalla legge della forza e dai due punti A e B. Ora, se ammettiamo che sussista il principio di sovrapposizione delle forze, cioè che la forza del campo è uguale alla somma delle forze centrali che lo costituiscono, e ciò è valido per i campi elettrostatici e gravitazionali, il campo generato da più centri di forza (cariche o masse) avrà ancora il carattere conservativo in quanto il lavoro della forza del campo è uguale alla somma dei lavori delle forze centrali che lo compongono.

Energia potenziale

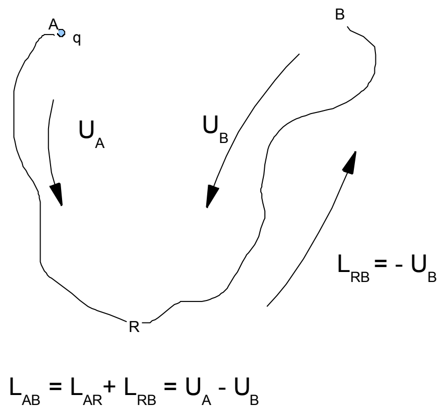
Definizione: fissato un punto R, si definisce **energia potenziale** di una data particella q posta in un punto P di un campo conservativo, il lavoro che le forze del campo compiono sulla particella quando questa si sposta lungo un cammino qualunque dal punto P al punto di riferimento R. Indicheremo l'energia potenziale di una particella q con $U_q(P)$ oppure con U(P) se dal contesto si capisce a quale particella è associata l'energia potenziale. In simboli:

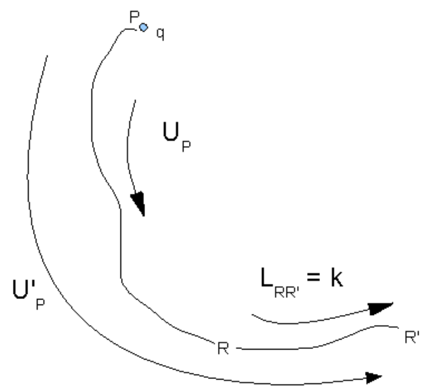
$$U(P) = L_{PR}$$

La funzione energia potenziale, è definibile solo nei campi conservativi e la sua importanza risiede nel fatto che il lavoro svolto dalle forze del campo sulla particella q che si sposta dal punto A la punto B lungo un cammino qualunque è dato semplicemente dalla differenza delle energie potenziali che q assume nel punto iniziale A e finale B, ovvero:

$$L_{AB} = U(A) - U(B)$$

La relazione precedente si ricava immediatamente se si considera per il calcolo del lavoro svolto dalle forze del campo su q, una linea tra A e B passante per il punto di riferimento R (figura in basso a sinistra).





La funzione energia potenziale di una particella è definita a meno di una costante additiva k.
Mostreremo ciò osservando che quando si fissano punti di riferimento R diversi per l'energia potenziale *U(P)*, scelte diverse di R comportano valori diversi di *U(P)*. Ora se anziché considerare il punto di riferimento R e quindi l'energia potenziale *U(P)*, si considera il punto R' e la relativa energia potenziale *U'(P)* della particella q nello stesso punto P, *U'(P)* e *U(P)* sono legati tra loro dalla semplice relazione (vedere la figura di sopra a destra):

$$U'(P) = U(P) + k$$

dove *K* è una costante, uguale al lavoro svolto dalle forze del campo sulla particella q quando questa si sposta da R a R' infatti:

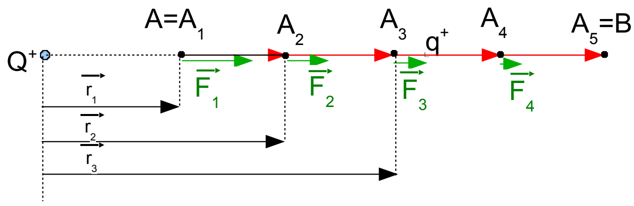
$$U'(P) = L_{PR'} = L_{PR} + L_{RR'} = U(P) + k$$

dove si è scelta per il calcolo di *U'(P)* una linea passante per R che unisce P con R'.

Lavoro della forza elettrica generata da una carica puntiforme Q, su una carica puntiforme q

Per semplicità di calcolo consideriamo ora solo il caso di Q^+ e di q^+ con q^+ che si muove lungo un tratto radiale dal punto A al punto B, il caso generale del calcolo del lavoro su una linea qualsiasi congiungente due punti qualsiasi sarà considerato in seguito.
Calcoliamo pertanto il lavoro svolto dalle forze elettriche sulla carica q che si muove dal punto A la punto B. Secondo la definizione di lavoro a un certo punto del processo di calcolo si ottiene: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \overrightarrow{\Delta S_i}$ dove $\overrightarrow{\Delta S_i} = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ è un vettore parallelo ed equiverso a $\vec{F_i}$ mentre $\vec{r}_i$ è il vettore posizione del punto A_i rispetto alla carica Q^+. Nel processo di calcolo del lavoro si considera come forza del campo nel tratto i-esimo una forza intermedia tra la forza in A_i e in A_{i+1} e precisamente la forza radiale agente nel punto intermedio del tratto A_iA_{i+1} la cui distanza da Q è proprio la media geometrica delle distanze r_i di A_i e r_{i+1} di A_{i+1} da Q. Tale punto, nel tratto i-esimo dista $\sqrt{r_i r_{i+1}}$ (media geometrica tra r_i

ed r_{i+1}) da Q e il modulo della forza F_i agente sulla carica q posta in esso, per la legge di Coulomb è uguale a: $\frac{Qq}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_i r_{i+1}}$



Per il carattere radiale sia della forza coulombiana che degli spostamenti, i vettori forza e i relativi spostamenti sono paralleli ed equiversi (le cariche Q e q entrambe positive quindi si respingono), pertanto la somma di sopra può essere scritta come somma dei prodotti dei moduli delle forze per l'ampiezza dei relativi spostamenti così come segue:

$$F_1 \cdot \Delta S_1 + F_2 \cdot \Delta S_2 + \ldots + F_n \cdot \Delta S_n$$

Ora se sostituiamo i valori di queste forze e spostamenti, la somma diviene:

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2 r_3} \cdot \left(r_3 - r_2\right) + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_3 r_4} \cdot \left(r_4 - r_3\right) + \ldots + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_n r_{n+1}} \cdot (r_{n+1} - r_n)$$

da cui, ponendo in evidenza il fattore comune , si ha:

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) + \frac{1}{r_2 r_3}(r_3 - r_2) + \frac{1}{r_3 r_4}(r_4 - r_3) + \ldots + \frac{1}{r_n r_{n+1}}(r_{n+1} - r_n)\right]$$

svolgendo i prodotti si ottiene la somma:

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}}\right)\right]$$

in cui si osserva che il secondo termine di un addendo tra parentesi è opposto al primo termine dell'addendo successivo tra parentesi, e pertanto, cancellando i termini opposti si ottiene il valore:

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{n+1}}\right)$$

Queste semplificazioni si applicano ad ognuno degli infiniti passi per il calcolo del lavoro, pertanto anche la somma infinita con gli spostamenti infinitesimi *dr* assume lo stesso valore:

ovvero: $$L_{AB} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \qquad (\mathbf{3})$$

Nel caso generale del calcolo del lavoro su una linea qualsiasi congiungente due punti non appartenenti alla stessa retta radiale, il lavoro, tenendo conto del carattere conservativo dei campi di forza centrali, può essere calcolato scegliendo un particolare percorso in modo da semplificare i calcoli. Come percorso scegliamo quello che va da A a B attraverso il tratto radiale AB' e il tratto circolare con centro la carica Q, B'B, con B' sulla stessa superficie sferica con centro Q passante per B. Nel tratto AB' il lavoro vale

$$L_{AB'} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{B'}}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

essendo $r_{B'} = r_B$. Nel tratto circolare sulla sfera per B e B' con centro in Q, il lavoro è nullo come facilmente si deduce osservando che gli spostamenti infinitesimi sono tangenti alla sfera e al tratto circolare e pertanto perpendicolari alle corrispondenti forze elettriche radiali su q, per cui il prodotto scalare tra forza e spostamento per ogni tratto infinitesimo è uguale a zero, così anche la loro somma infinita è uguale a zero. Ora, essendo

$$L_{AB} = L_{AB'} + L_{B'B}$$

per i calcoli precedenti si ha:

$$L_{AB} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{B'}}\right) + 0 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{B'}}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Questa espressione vale anche quando le cariche Q e q sono entrambe negative o hanno segno opposto se si considerano nella formula con il loro segno da intendersi come segno algebrico. In conclusione, qualsiasi siano i punti A e B e qualsiasi sia il percorso seguito dalla carica q per portarsi da A a B, le forze elettriche del campo generato da Q compiono un lavoro calcolabile con la (**3**).

Energia potenziale elettrica e potenziale elettrico

Daremo ora la definizione di potenziale elettrico. Per fissare le idee consideriamo un campo elettrostatico generato da una carica puntiforme Q e una carica elettrica q immersa in quel campo. Fissato un punto di riferimento R, in genere infinitamente lontano da Q (in pratica così lontano che lì il campo elettrico è praticamente nullo), si definisce **energia potenziale** della carica q posta nel punto A del campo il lavoro che le forze del campo compiono sulla carica q quando questa si sposta da A verso R. Questo lavoro, quindi l'energia potenziale di q, per quanto abbiamo detto precedentemente è data da:

$$U(A) = L_{AR} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_R}\right)$$

Se assumiamo q lontanissima da Q, cioè $r_R \to \infty$ e pertanto $\frac{1}{r_R} \to 0$ si ha:

$$U(A) = L_{AR} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_R}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - 0\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_A}$$

Come si vede, l'energia potenziale della carica q è sempre direttamente proporzionale a q. Dividendo l'energia potenziale *U(A)* di q per la carica q stessa, si ottiene il cosiddetto potenziale elettrico:

$$V(A) = \frac{U(A)}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_A}$$

Estendiamo ora l'utile nozione di potenziale elettrico a qualunque campo elettrostatico.

Definizione: i chiama **potenziale elettrico** in un punto P il rapporto tra l'energia potenziale di una carica q posta in P e la carica stessa. In simboli

$$V(P) = \frac{U(P)}{q}$$

Questo rapporto è indipendente dalla carica q considerata, in quanto l'energia potenziale è direttamente proporzionale alla carica q, e pertanto definisce una nuova funzione dello spazio, il potenziale elettrico. Per i campi elettrici si è soliti fissare come punto di riferimento R per il calcolo dell'energia potenziale di una carica, un punto infinitamente lontano dal campo oppure un punto sul terreno. Nel primo caso possiamo allora dire che: **si chiama potenziale elettrico in un punto P il lavoro che le forze del campo compiono su una carica q quando questa si sposta dal punto P verso un punto infinitamente lontano, diviso il valore della carica q**. Il potenziale elettrico si misura in Volt (V), 1Volt= 1Joule/1Coulomb, in simboli: 1V = 1J/1C.
Vale inoltre la seguente importante relazione:

$$\frac{L_{AB}}{q} = \frac{U(A) - U(B)}{q} = \frac{U(A)}{q} - \frac{U(B)}{q} = V(A) - V(B)$$

Pertanto si dice che **tra due punti A e B vi è la differenza di potenziale di 1 Volt (1V) se le forze del campo compiono il lavoro di 1 Joule su una carica di 1Coulomb quando questa si sposta da un punto all'altro**.