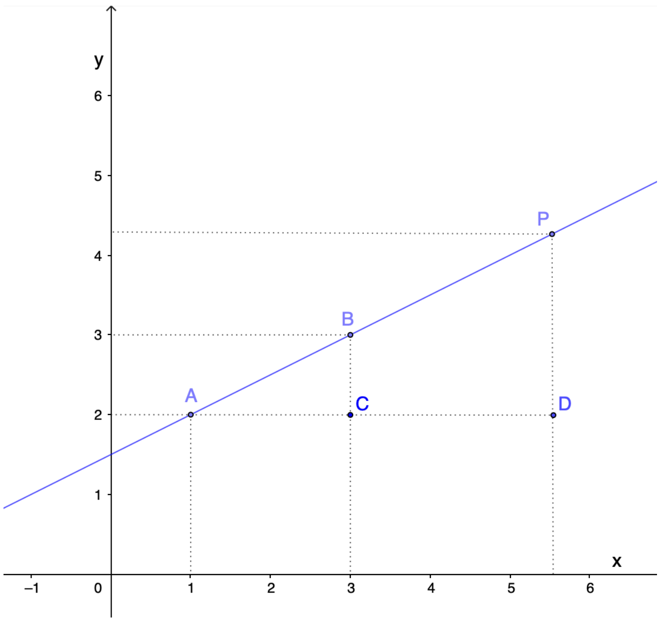
Equazione di una retta nel piano

Rette parallele agli assi

Consideriamo la figura al lato, sono indicate due rette parallele agli assi cartesiani. Nel contesto della geometria analitica le rette parallele all'asse x vanno intese come tutti i punti del piano che hanno una medesima ordinata, quelle parallele all'asse y si intendono come costituite da tutti i punti del piano con la medesima ascissa. Per esempio la retta orizzontale rossa, passante per il punto (0;1) ha equazione: y = 1, mentre la retta verticale verde, passante per il punto (-2; 0) ha equazione x = -2. In particolare l'asse x va inteso come i punti del piano che hanno ordinata uguale a zero, quindi la sua equazione è: y=0. L'asse y va inteso come i punti del piano che hanno ascissa zero, quindi la sua equazione è: x=0.

Rette oblique



Consideriamo due punti $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ del piano in modo che la retta passante per essi non sia parallela a nessuno degli assi cartesiani. Preso un qualunque altro suo punto $P(x_P; y_P)$, si considerino i due triangoli ABC e APD nella figura a fianco, con i lati CB e DP paralleli all'asse y e i lati AC AD paralleli all'asse x. Questi due triangoli hanno angoli retti in C e D per costruzione, quindi sono triangoli rettangoli e avendo in A un angolo in comune sono anche simili tra loro. Per la proporzionalità tra i lati corrispondenti dei due triangoli (si corrispondono i lati che hanno angoli opposti uguali) vale la seguente proporzione:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{AD}} \longrightarrow \frac{y_B - y_C}{x_C - x_A} = \frac{y_P - y_D}{x_D - x_A} \longrightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}$$

Dove si è tenuto conto che: $y_C = y_A$, $x_C = x_B$, $y_D = y_A$, $x_D = x_P$

Equazione di una retta nel piano

Se il punto P non appartiene alla retta ovviamente il triangolo APD non sarà simile al triangolo ABC e pertanto non varrà la proporzione di sopra. Pertanto possiamo affermare che se un punto $P(x;y)$ appartiene alla retta passante per i due punti A e B allora le sue coordinate $(x;\ y)$ soddisfano l'equazione:

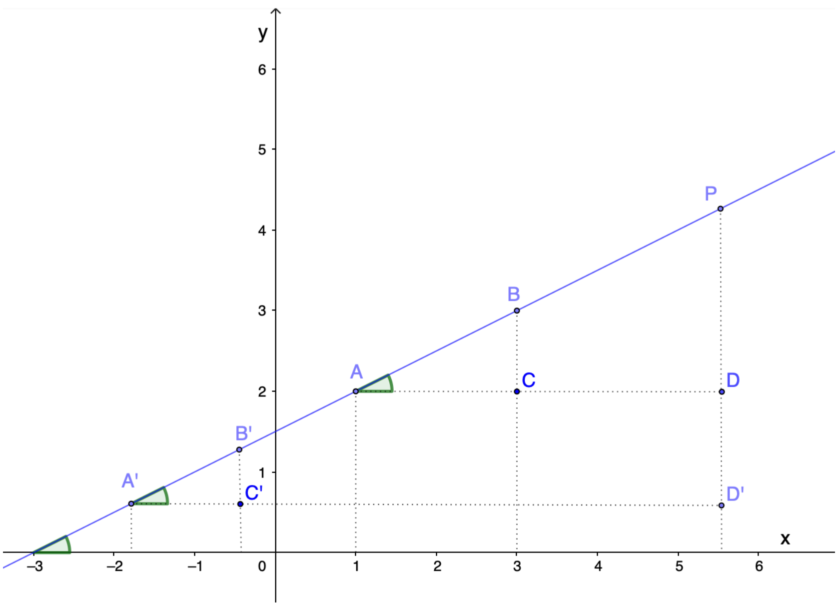
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A} \quad \longrightarrow \quad y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

Ponendo $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ **(1)**

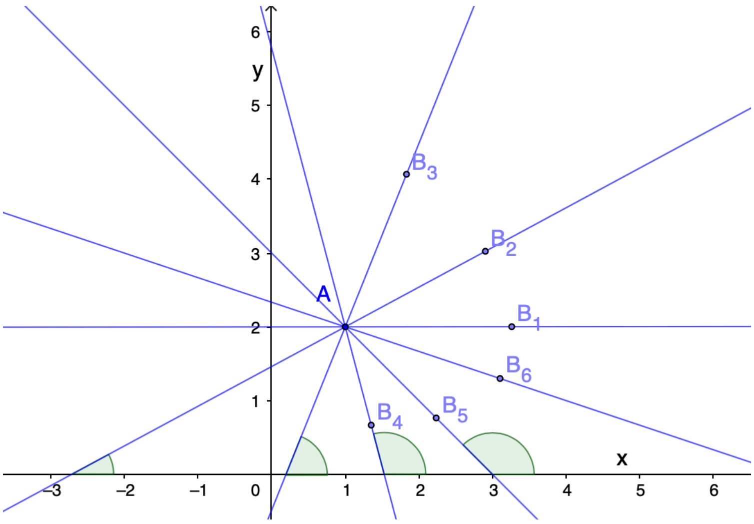
L'equazione della retta diventa:

$y - y_A = m(x - x_A)$ **(2)**

Questa è una equazione di primo grado nelle incognite x e y che è soddisfatta solo dalle coordinate dei punti sulla retta. Nell'equazione **(2)** m è detta *pendenza della retta* o ***coefficiente angolare della retta*** e risulta essere legata solo all'angolo $\widehat{CAB}$ e non alla particolare scelta dei due punti A e B sulla retta. Si osservi infatti che m rimane lo stesso per qualunque coppia di punti A' e B' si prenda sulla retta in virtù della similitudine del triangolo ABC con il triangolo A'B'C' quest'ultimo costruito in modo analogo a come si è creato il triangolo ABC descritto in precedenza. Inoltre si noti che m varia solo se cambia l'angolo $\widehat{CAB}$ che è anche uguale all'angolo che la retta forma con l'asse x. Per capire ciò basta immaginare di far variare nella **(1)** solo l'ordinata y_B di B. Da quanto precede si desume che rette parallele tra loro, formando angoli uguali con l'asse x, avranno lo stesso coefficiente angolare m.



Fascio proprio di rette

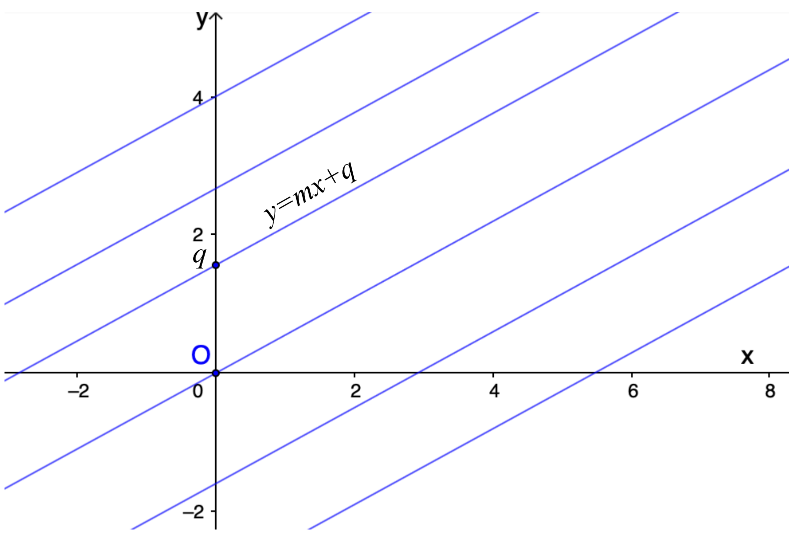


Se fissiamo il punto A e immaginiamo di far variare il punto B, e quindi m, le rette AB costituiscono i fascio di rette del piano di centro A. L'equazione **(2)**

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

viene pertanto chiamata equazione del fascio di rette di centro A, dove il parametro m del fascio dà la pendenza della retta del fascio. Si osservi che le rette verticali non hanno pendenza in quanto le ascisse di A e di B sono uguali e questo rende impossibile l'esistenza del rapporto **(1)** e quindi di m. Dalla **(1)** discende che se B si trova sopra e a destra di A cioè $y_B > y_A$ e $x_B > x_A$, m è positivo, se invece B si trova sotto e a destra di A cioè $y_B < y_A$ e $x_B > x_A$, m è negativo ovvero se la retta forma angoli acuti con l'asse x m è positivo, se forma angoli ottusi con l'asse x m è negativo, inoltre se B è a destra di A e alla stessa altezza cioè la retta è orizzontale e quindi $y_B = y_A$, m è uguale a zero. Nel caso particolare in cui il punto A è l'origine O$(0;0)$ del sistema di riferimento cartesiano, l'equazione del fascio di rette passante per O diviene: $y = mx$.

Fascio improprio di rette



Tutte le rette del piano parallele ad una retta data costituiscono un fascio improprio di rette nel piano. Ciascuna di queste rette del fascio dunque formerà con l'asse x un angolo uguale a quello delle altre rette del fascio, per un noto teorema di geometria piana. Il fatto che due rette qualsiasi del fascio improprio formino angoli uguali con l'asse x implica necessariamente come affermato in precedenza che le loro pendenze siano uguali, ovvero che le loro equazioni abbiano lo stesso m. Se fissiamo m il fascio improprio di rette del piano parallele alla retta $y = mx$ ha equazione:

$$y = mx + q \qquad \textbf{(3)}$$

dove q è il parametro del fascio e corrisponde all'ordinata del punto sulla retta che ha ascissa uguale a zero. Non è difficile capire che la **(3)** rappresenta proprio l'equazione di una retta se fissiamo m e q. Infatti ad ogni punto $A(x_A; mx_A)$ appartenente alla retta $y = mx$ corrisponde un punto $A'(x_A; mx_A + q)$ che soddisfa l'equazione **(3)**, e che i punti che soddisfano l'equazione **(3)** sono solo quelli corrispondenti a quelli che soddisfano l'equazione $y = mx$ aggiungendo q alla y. Quindi anche l'equazione **(3)** è l'equazione di una retta del piano, quella che si ottiene traslando verticalmente di q la retta $y = mx$. In generale ogni retta non verticale ha una equazione che può essere scritta nella forma **(3), detta forma esplicita dell'equazione di una retta,** con m e q aventi il significato geometrico prima esposto.

Dalle considerazioni che precedono circa l'equazione di una retta, possiamo dedurre che ogni equazione di primo grado in x e y rappresenta l'equazione di una retta. La forma più generale dell'equazione di primo grado in x e y:

$$ax + by + c = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

In questa equazione y è esplicitabile se $b \neq 0$ e si ottiene la forma **(3)**. Se b = 0 invece si ottiene una retta verticale di equazione $x = -\dfrac{c}{a}$. L'equazione **(4)** è detta **equazione della retta in forma implicita** e mediante essa possiamo esprimere l'equazione di qualsiasi retta, rette verticali incluse.

Esercizio 1

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A(1;\ 2)$ e $B(3;\ 4)$

Risoluzione

Calcoliamo prima m con la formula: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \longrightarrow \quad m = \dfrac{4-2}{3-1} = \dfrac{2}{2} = 1$

Scriviamo l'equazione della retta passante per due punti con la formula: $y - y_A = m(x - x_A)$

$$y - y_A = m(x - x_A) \quad \longrightarrow \quad y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \quad \longrightarrow \quad y = x - 1 + 2 \quad \longrightarrow \quad y = x + 1$$

Soluzione: $y = x + 1$

Esercizio n.2

Scrivi l'equazione del fascio proprio di rette di centro il punto $A(1;3)$

Risoluzione

Usando la formula del fascio proprio: $y - y_A = m(x - x_A)$, si ha:

$$y - y_A = m(x - x_A) \quad \longrightarrow \quad y - 3 = m(x - 1)$$

Soluzione: $y - 3 = m(x - 1)$. Al variare di m si ottengono tutte le rette del fascio tranne la retta verticale che va aggiunta. La retta verticale passante per A ha equazione: $x = 1$

Esercizio n.3

Scrivi l'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta: $4x - 2y + 3 = 0$

Risoluzione

Scriviamo l'equazione della retta data in forma esplicita:

$$4x - 2y + 3 = 0 \quad \longrightarrow \quad -2y = -4x - 3 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{-4}{-2}x - \frac{3}{-2} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Da questa equazione deduciamo che il coefficiente angolare della retta ovvero il coefficiente della x è: $m = \frac{1}{2}$. Il fascio di rette cercato quindi è:

$$y = mx + q \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + q$$

Soluzione: $y = \frac{1}{2}x + q$. Al variare di q si ottengono tutte le rette del fascio.

Esercizio n. 4

Disegna il grafico della retta di equazione: $10x + 5y - 15 = 0$

Risoluzione

Scriviamo l'equazione della retta in forma esplicita:

Equazione di una retta nel piano

$$10x + 5y - 15 = 0 \quad \longrightarrow \quad 5y = -10x + 15 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{-10}{5}x + \frac{15}{5} \quad \longrightarrow \quad y = -2x + 3$$

Troviamo ora due soluzioni dell'equazione in forma esplicita, dando alla x due valori arbitrari e ricavando i corrispondenti valori della y che rendono soddisfatta l'equazione. Per esempio:

Per $x = 2$ si ha: $y = -2 \cdot (2) + 3 \quad \longrightarrow \quad y = -4 + 3 \quad \longrightarrow \quad y = -1$

Quindi la coppia di valori $(2; -1)$ è una soluzione dell'equazione data;

Per $x = 4$ si ha: $y = -2 \cdot (4) + 3 \quad \longrightarrow \quad y = -8 + 3 \quad \longrightarrow \quad y = -5$

Quindi la coppia di valori $(4; -5)$ è una soluzione dell'equazione data.

Le due soluzioni dell'equazione trovate: $(2; -1)$, $(4; -5)$, sono le coordinate di due punti sulla retta cercata, pertanto disegnamo nel piano cartesiano i due punti e li uniamo con il righello. La linea tracciata è il grafico della retta richiesto.

Soluzione