Equazioni lineari in due incognite

Nozione di equazione lineare in due incognite

Consideriamo la seguente equazione algebrica in due incognite x, y e di primo grado in forma normale:

$$3x - 2y + 1 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Una equazione algebrica è una uguaglianza tra due espressioni algebriche. Si dice scritta in forma normale se a sinistra dell'uguale (primo membro dell'equazione) compare una espressione algebrica, mentre a destra dell'uguale (secondo membro) compare lo zero.

Il polinomio in x, y a sinistra dell'uguale è di primo grado in x, y pertanto l'equazione si dice di primo grado o lineare nelle incognite x, y. Chiamiamo con $P(x, y)$ il polinomio al primo membro dell'equazione poniamo cioè

$$P(x; y) = 3x - 2y + 1$$

Detto polinomio possiamo considerarlo come una formula che, dati due valori, uno alla x e l'altro alla y, da come risultato dei calcoli indicati, un terzo numero.

Per esempio:

per $x = 8$ e $y = 11$ si ha:

$$P(8; 12) = 3 \cdot (8) - 2 \cdot (11) + 1 = 24 - 22 + 1 = 3$$

Secondo esempio

per $x = -4$ e $y = 7$ si ha:

$$P(-4; 7) = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (7) + 1 = -12 - 14 + 1 = -25$$

E così via. Come si può facilmente dedurre, a valori diversi di x e y corrispondono valori diversi del polinomio $P(x; y)$.

Soluzioni di una equazione

Per soluzione della equazione data si intendono tutte quelle coppie ordinate di numeri $(\overline{x}; \overline{y})$ tali che assegnati nell'ordine alle incognite x, y, fanno sì che al primo membro si ottenga un numero uguale al secondo, fanno sì cioè che sia vera l'uguaglianza tra il primo e il secondo sembro dell'equazione. Risolvere l'equazione significa trovare tutte le coppie di numeri $(\overline{x}; \overline{y})$ che soddisfano l'eguaglianza se vengono sostituiti alle incognite x, y. Per risolvere una equazione possiamo avvalerci di una tecnica basata su due principi che ci consentiranno di trasformarla in altre con le stesse soluzioni ma di più facile soluzione. Diciamo equivalenti, due disequazioni diverse che hanno però le stesse soluzioni.

Equazioni lineari in due incognite

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di una equazione uno stesso numero o una stessa espressione nelle incognite, sempre calcolabile, si ottiene una equazione equivalente a quella data.

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo ambo i membri di una equazione uno stesso numero o una stessa espressione nelle incognite, sempre calcolabile e mai nulla, si ottiene una equazione equivalente a quella data.

Per capire la validità di questi principi immaginiamo una bilancia in equilibrio con dei pesetti.

Se aggiungiamo o togliamo lo stesso peso ad ambo i piatti della bilancia, questa resterà sempre in equilibrio, cioè il peso di sinistra sarà uguale a quello di destra, pur essendo entrambi diversi da quelli iniziali. Lo stesso dicasi se dividiamo o moltiplichiamo per una stessa quantità entrambi i pesi nei piatti della bilancia, questa rimarrà in equilibrio.
Pensiamo ora ad una equazione e immaginiamo i due membri della equazione come ai due piatti di una bilancia. Se $(\bar{x};\bar{y})$ è una soluzione della equazione i due membri assumono lo stesso valore (zero nel nostro caso), quindi aggiungendo o togliendo la stessa quantità o moltiplicando e dividendo per la stessa quantità a destra o a sinistra dell'uguale i due membri della equazione (assimilati ai due piatti della bilancia) saranno ancora uguali tra loro e cioè l'uguaglianza tra i membri sarà ancora soddisfatta. Se invece $(\bar{x};\bar{y})$ **non** è una soluzione della equazione i due membri assumono valori diversi, quindi aggiungendo o togliendo la stessa quantità o moltiplicando e dividendo per la stessa quantità a destra o a sinistra dell'uguale i due membri della equazione avranno ancora valori diversi tra loro e dunque l'uguaglianza tra i membri non sarà neanche adesso soddisfatta. Ricapitolando, se $(\bar{x};\bar{y})$ soddisfa l'equazione (è una soluzione dell'equazione) soddisfa anche l'equazione che si ottiene da questa aggiungendo o togliendo o moltiplicando o dividendo per la stessa quantità i due membri della equazione, se $(\bar{x};\bar{y})$ non soddisfa l'equazione data, non soddisfa neanche l'equazione che si ottiene da essa aggiungendo o togliendo o moltiplicando o dividendo per la stessa quantità i due membri della equazione. Pertanto l'equazione data e quella che si ottiene dopo le operazioni dette, sono equivalenti.

Equazioni lineari in due incognite

Risoluzione di una equazione

Consideriamo l'equazione $3x - 2y + 1 = 0$. Per cercare le soluzioni operiamo come segue:

Sottraiamo uno ad ambo i membri, otteniamo così una equazione equivalente alla data.

$$3x - 2y + 1 - 1 = 0 - 1 \quad \longrightarrow \quad 3x - 2y = -1$$

(Nota: questa trasformazione in sostanza consiste nel trasportare 1 dal primo al secondo membro e al suo cambio di segno)

Ora sottraiamo $3x$ ad ambo i membri della nuova equazione, otteniamo un'altra equazione equivalente a questa, e quindi a quella data.

$$3x - 2y - 3x = -1 - 3x \quad \longrightarrow \quad -2y = -3x - 1$$

(Nota: come prima, praticamente si è trasportato $3x$ dal primo al secondo membro e lo si è cambiato di segno)

Dividiamo primo e secondo membro per -2.

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-3x - 1}{-2} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

la nuova equazione così ottenuta è una equazione equivalente alla precedente e quindi equivalente all'equazione data. L'equazione **(2)** si dice scritta in forma esplicita. Grazie a questa forma siamo ora in grado di trovare in modo semplice delle soluzioni di essa e quindi delle soluzione della equazione assegnata ad essa equivalente. A tal fine diamo alla incognita x dei valori arbitrari e calcoliamo il valore che assume il secondo membro dell'equazione.

Per esempio per $x = 5$ il secondo membra diventa $\longrightarrow \quad \frac{3}{2}(5) + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = \frac{16}{2} = 8$

Come si verifica immediatamente, se nella equazione **(2)** poniamo 5 al posto della x e 8 al posto della y l'uguaglianza è soddisfatta, ovvero la coppia ordinata di numeri $(5; 8)$ è una soluzione della equazione **(2)** e quindi della equazione data ad essa equivalente. Verifichiamolo, verifichiamo cioè che $(5;8)$ è una soluzione dell'equazione **(1)**.

Per $x=5$ e $y=8$ il 1° membro della **(1)** diventa:

$$3\cdot(5)-2\cdot(8)+1=15-16+1=0$$

Vale zero proprio come il secondo membro dell'equazione. Quindi l'equazione **(1)** è soddisfatta dalla coppia ordinata $(\overline{x};\overline{y})=(5;8)$.

Abbiamo visto come si possono trovare delle soluzioni dell'equazione **(2)** e che queste sono anche soluzioni della equazione **(1)**. Da quanto abbiamo detto si può capire che l'equazione **(2)** e quindi la **(1)** ha infinite soluzioni, una per ogni valore della x.

Esercizio

Determina tre soluzioni dell'equazione: $2x-5=y-3x+4$ **(3)**

Risoluzione

Applicando i principi di equivalenza riscriviamo l'equazione in forma esplicita

$$2x-5=y-3x+4 \quad\longrightarrow\quad 0=y-3x+4-2x+5$$

$$y-3x+4-2x+5=0 \quad\longrightarrow\quad y-5x+9=0$$

$$y-5x+9=0 \quad\longrightarrow\quad y=5x-9$$

$$y=5x-9 \qquad \textbf{(4)}$$

Ora che abbiamo scritto l'equazione in forma esplicita, cerchiamo 3 soluzioni dando alla x tre valori diversi arbitrariamente.

Per $x=0$ il secondo membro della **(4)** diventa: $\longrightarrow\quad 5\cdot(0)-9=0-9=-9$

Quindi per $x=0$ e $y=-9$ l'equazione **(4)** è soddisfatta ovvero $(0;-9)$ **è una soluzione dell'equazione data;**

Per $x = 2$ il secondo membro della **(4)** diventa: $\longrightarrow \quad 5 \cdot (2) - 9 \; = \; 10 - 9 = 1$

Quindi per $x = 2$ e $y = 1$ l'equazione **(4)** è soddisfatta ovvero $(2; 1)$ **è una soluzione dell'equazione data.**

Per $x = -3$ il secondo membro della **(4)** diventa: $\longrightarrow \quad 5 \cdot (-3) - 9 \; = -15 - 9 = -24$

Quindi per $x = -3$ e $y = -24$ l'equazione **(4)** è soddisfatta ovvero $(-3; -24)$ **è una soluzione dell'equazione data.**

Verifica delle soluzioni

Come prima, facciamo la verifica delle soluzioni trovate per l'equazione data:

$2x - 5 = y - 3x + 4.$

Verifichiamo che $(0; -9)$ è una soluzione dell'equazione data.

Calcolo del 1° membro della equazione per $x = 0$ e $y = -9$

$\longrightarrow \quad 2 \cdot (0) - 5 \; = \; 0 - 5 = -5$

Calcolo del 2° membro della equazione per $x = 0$ e $y = -9$

$\longrightarrow \quad (-9) - 3 \cdot (0) + 4 = -9 - 0 + 4 = -5$

Il 1° membro è uguale al 2° membro quindi l'equazione è soddisfatta.

In modo analogo si procede per la verifica delle altre due soluzioni, per $(2; 1)$ i due membri dell'equazione **(3)** diventano entrambi uguali a -1 mentre per $(-3; -24)$ i due membri della **(3)** diventano entrambi uguali a -11.