ANALISI NON STANDARD

LE FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE

Si chiama **intorno di un numero iperreale c**, un qualunque intervallo $[a; b]$ di iperreali contenente c. Se c è strettamente contenuto nell'intervallo, ossia: $a < c < b$, l'intorno è detto completo. Se l'ampiezza dell'intervallo, b-a , è un infinitesimo, l'intervallo è detto infinitesimale.

DEFINIZIONE

Data una funzione analitica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **estensione naturale della funzione *f*** ai numeri iperreali la la funzione $f^*: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, la cui espressione analitica è la stessa della f ma la si applica però all'insieme dei numeri iperreali. Per comodità useremo per l'estensione naturale all'insieme degli iperreali di una funzione analitica reale lo stesso simbolo della funzione originale (omettiamo l'asterisco).

DEFINIZIONE DI LIMITE

L è il **limite** di $f(x)$ per x tendente a c se ogniqualvolta x è infinitamente vicino a c ma non uguale a c, $f(x)$ è infinitamente vicino a L.
In simboli

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

se ogniqualvolta $x \approx c$ ma $x \neq c$, $f(x) \approx L$. Quando non c'è alcun numero L che soddisfi la precedente definizione diciamo che il limite di $f(x)$ al tendere di x a c non esiste.
Si noti che il limite

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

dipende solo dai valori di $f(x)$ per x infinitamente vicino a c ma non uguale a c. Il valore di $f(c)$ stesso non ha alcuna influenza sul limite. Infatti spesso accade che

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

esiste ma $f(c)$ non è definito.

DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO

Una funzione analitica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **continua in un punto** (numero) c del suo dominio, se esiste un intorno completo infinitesimale I_c del punto c, tale che la sua immagine mediante f^* (estensione di f a $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$) sia un intorno infinitesimale $I_{f(c)}$ di *f(c).*
In modo più intuitivo, diciamo che una funzione *f(x)* è continua in un suo punto c se a punti infinitamente vicini a c corrispondono mediante f punti infinitamente vicini a *f(c)*, ossia: $f(c+\varepsilon) = f(c) + \delta$ con ε e δ infinitesimi. La continuità può essere espressa in termini di limiti. f è continua in c se e solo se

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

TEOREMA

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in un punto c allora anche la funzione di ε (infinitesimale): $\delta(\varepsilon) = f(c+\varepsilon) - f(c)$ è una funzione continua in $\varepsilon = 0$ e risulta: $\delta(0) = 0$.

DEFINIZIONE
Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **strettamente crescente** in un intervallo [a; b] se, presi due numeri reali qualunque x_1 e x_2 dell'intervallo, con $a \le x_1 < x_2 \le b$, risulta: $f(x_1) < f(x_2)$. Se invece risulta $f(x_1) > f(x_2)$ la funzione è detta **strettamente decrescente** in [a; b].

DEFINIZIONE
Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **monotòna in un intervallo** [a; b] se essa è strettamente crescente o strettamente decrescente in ogni punto di [a; b].

TEOREMA (sulla contiunità della funzione inversa)
Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in c e monotòna in un intorno completo infinitesimale I_c di c, allora la f è invertibile in questo intorno e la sua funzione inversa f^{-1} è continua in $f(c)$ e monotòna in $f(I_c)$.

DIMOSTRAZIONE
La funzione f essendo continua e monotòna in I_c, ha per immagine di I_c un intorno completo $I_{f(c)}$ di $f(c)$. Risulta poi biunivoca in $I_c \to I_{f(c)}$ e pertanto invertibile e la sua inversa $f^{-1}: I_{f(c)} \to I_c$ è continua (l'immagine inversa dell'intorno completo infinitesimale $I_{f(c)}$ di *f(c)*, è l'intorno completo infinitesimale I_c di $c = f^{-1}(f(c))$) e monotòna, in quanto risulta che se $x_1, x_2 \in I_c$:
- se f(x) è crescente: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ovvero f^{-1} è crescente;
- se f(x) è decrescente: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, ovvero f^{-1} è decrescente ■

TEOREMA
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue in *c*, allora sono continue in *c* anche le funzioni:
$f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ con $g(c) \neq 0$.
Esempi di funzioni continue
1) $f(x) = k$ con *k* costante, è continua per $\forall x \in \mathbb{R}$
2) $f(x) = x$, è continua per $\forall x \in \mathbb{R}$
3) $P(x)$, polinomio in x, è continuo per $\forall x \in \mathbb{R}$
4) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, è continua per $\forall x \in \mathbb{R}^+$
5) $f(x) = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+$, è continua per $\forall x \in \mathbb{R}$
6) $f(x) = log_a x$ con $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, è continua per $\forall x \in \mathbb{R}^+$

DEFINIZIONE DI CONTINUITA' IN UN INTERVALLO APERTO
Diciamo che f è **continua in un intervallo aperto *I*** se f è continua in ogni punto c di I. Ciò equivale a dire che

$$f\big(st(x)\big) = st(f(x))$$

Per ogni numero iperreale x la cui parte standard è in I.

PARTIZIONI DI UN INTERVALLO

Sia dato un intervallo chiuso $[a, b]$. Una **partizione** di $[a, b]$ è formata scegliendo un intero positivo n e dividendo $[a, b]$ in n parti uguali. Ciascuna parte sarà chiamata sottointervallo e avrà lunghezza $t = (b - a)/n$. Gli n sottointervalli sono

$$[a, a+t], [a+t, a+2t], \dots, [a+(n-1)t, b]$$

Gli estremi

$$a, a+t, a+2t, \dots, a+(n-1)t, a+nt = b$$

sono chiamati punti di partizione

Una **partizione infinita** di $[a, b]$ si ottiene scegliendo un iperintero infinito positivo H e dividendo l'intervallo iperreale $[a, b]^*$ in H parti uguali. Ogni sottointervallo della partizione ha lunghezza infinitesima

$$\delta = (b-a)/H$$

Ogni punto tra a e b appartiene ad uno dei sottointervalli infinitamente piccoli.

TEOREMA DEL VALORE INTERMEDIO

Si supponga che la funzione f sia continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$. Allora per ogni numero reale D compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, c'è un elemento c di (a, b) tale che $f(c) = D$.

TRACCIA DI DIMOSTRAZIONE Assumiamo che $f(a) < D < f(b)$. Dapprima sia n un intero positivo e si divida l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali. Se $a + mt$ è l'ultimo punto della partizione in cui il valore è minore di D, $f(a+mt) < D$, allora D è tra $f(a+mt)$ e il valore successivo $f(a+(m+1)t)$.

Per trovare il punto c, usiamo il procedimento precedente ma con una partizione infinita di $[a, b]$,

$$a, a+\delta, a+2\delta, \dots, a+H\delta = b$$

Sia $a + K\delta$ l'ultimo punto della partizione il cui valore corrispondente è minore di D, $f(a+K\delta) < D$. Come prima, per l'Assioma di Soluzione, D è tra $f(a+K\delta)$ e $f(a+(K+1)\delta)$. Ma f è continua, così $f(a+K\delta)$ è infinitamente vicino a $f(a+(K+1)\delta)$. Concludiamo che $f(a+K\delta)$ è infinitamente vicino D. Ora sia c la parte standard di $a+K\delta$, allora

$$f(c) = st\big(f(a+K\delta)\big) = D \quad \blacksquare$$