I PROBLEMI CON I LIMITI

Soluzioni di problemi tratti dal testo *Corso Base Blu di Matematica,* volume 5

[1] (Problema n. 448 a pag. 183 U)

Nel triangolo ABC si ha: $\overline{AB} = b$, $B\hat{A}C = 3A\hat{B}C$. Conduci la semiretta r avente origine in A, che incontri il lato BC in P e tale che risulti: $B\hat{A}P = P\hat{B}A$.

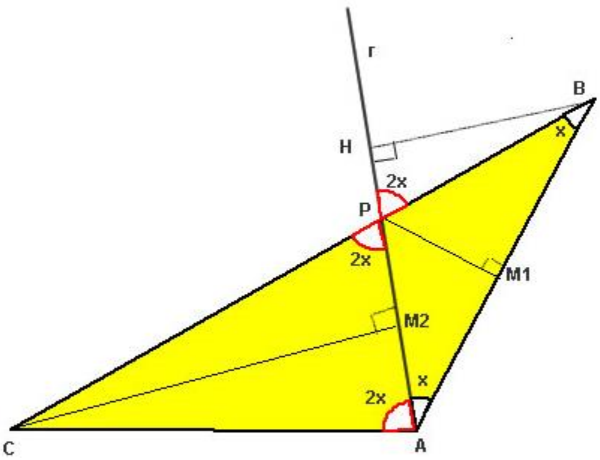
a) Calcola il limite del rapporto $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$ quando l'angolo $P\hat{B}A$ tende a zero e quando tende a $\frac{\pi}{4}$.

b) Indica con H la proiezione di B sulla semiretta r e calcola i limiti del rapporto $\frac{\overline{BH}}{\overline{PB}}$ quando l'angolo $P\hat{B}A$ tende a zero e quando tende a $\frac{\pi}{4}$. [2; 0; 0; 1]

SVOLGIMENTO

$B\hat{A}C = 3A\hat{B}C$; $B\hat{A}P = P\hat{B}A \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad C\hat{A}P = 2P\hat{A}B$ e $C\hat{P}A = 2P\hat{A}B$



$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AM_1}^2 + \overline{M_1P}^2} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}tgx\right)^2} = \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{1+tg^2x}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AM_2}^2 + \overline{M_2C}^2} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AP}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AP}}{2}tg2x\right)^2} = \frac{\overline{AP}}{2}\sqrt{1+tg^2 2x}$$

$$\overline{BH} = \overline{PB}\, sen2x$$

(a1) $$\lim_{P\hat{B}A\to 0} \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overline{AP}}{\frac{\overline{AP}}{2}\sqrt{1+tg^2 2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+tg^2 2x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}} = 2$$

(a2) $$\lim_{P\hat{B}A\to \frac{\pi}{4}} \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\overline{AP}}{\frac{\overline{AP}}{2}\sqrt{1+tg^2 2x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{2}{\sqrt{1+tg^2 2x}} = \frac{2}{\sqrt{1+tg\,2\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

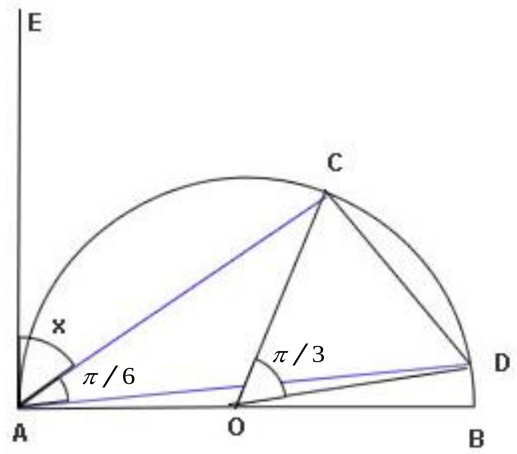
(b1) $$\lim_{P\hat{B}A\to 0} \frac{\overline{BH}}{\overline{PB}} = \lim_{x\to 0}\frac{\overline{PB}\,sen2x}{\overline{PB}} = sen(2\cdot 0) = sen0 = 0$$

(b2) $$\lim_{P\hat{B}A\to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\overline{BH}}{\overline{PB}}\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\overline{PB}\,sen2x}{\overline{PB}} = sen(2\cdot\frac{\pi}{4}) = sen\frac{\pi}{2} = 1$$

[2] (Problema n. 451 a pag. 183 U)

E' data una semicirconferenza di centro O con diametro $\overline{AB} = 2r$. Conduci dal punto A, due corde AC e AD in modo che $C\hat{O}D = \frac{\pi}{3}$ e, sempre dal punto A, la semiretta AE tangente in A alla semicirconferenza. Scrivi in funzione dell'angolo $E\hat{A}C$ il rapporta tra la misura dell'area del triangolo CAD e di $\overline{CD}^2$, quindi calcola il limite quando D $\to$ B.

SVOLGIMENTO



Poniamo: $x = E\hat{A}C$

Per il teorema dell'angolo alla circonferenza si ha:
$C\hat{A}D = \frac{1}{2} C\hat{O}D = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

$\overline{CD} = r$ in quanto CD è il lato di un poligono esagonale inscritto alla circonferenza, di raggio r.

Tenendo conto che i triangoli AOC e AOD sono isosceli in quanto hanno due lati uguali al raggio della circonferenza, possiamo dire che:

$$\overline{AC} = 2\,\overline{AO}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2r\,sen x$$

$$\overline{AD} = 2\,\overline{AO}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right) = 2r\,sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Siamo ora in grado di rispondere ai problemi proposti.

Area($C\overset{\Delta}{A}D$) = $\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}2r\,senx\cdot 2r\,sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{2} = r\cdot senx\cdot r\cdot sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\lim_{D\to B}\frac{Area(C\overset{\Delta}{A}D)}{\overline{CD}^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{r^2 senx\cdot sen(x+\frac{\pi}{6})}{r^2} = sen\frac{\pi}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

[3] (Problema n. 455 a pag. 184 U)

Dato il fascio di parabole $y = -x^2 + kx$, individua le caratteristiche comuni a tutte le parabole, indicando in particolare il punto base del fascio B e il luogo geometrico descritto dai vertici delle parabole al variare di $k \in \Re$. Dopo aver scritto l'equazione della tangente in B alla generica parabola del fascio, considera il punto di intersezione C tra tale tangente e la retta x=k e il punto H proiezione di C sull'asse x. Calcola

$$\lim_{k\to 0}\frac{\overline{BC} - \overline{BH}}{\overline{CH}\cdot\overline{BH}}$$

SVOLGIMENTO

Tutte le parabole del fascio hanno asse verticale (hanno la forma: $y=ax^2+bx+c$), volgono la concavità verso il basso con la stessa apertura (a=-1) e passano tutte per l'origine O del sistema di riferimento (c=0). Il punto O è anche il punto base B, l'unico del fascio (punto comune a tutte le parabole del fascio).

Il vertice V di una parabola y=ax²+bx+c ha coordinate: $V\left(-\frac{b}{2a};\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}\right)$

I vertici delle parabole del fascio quindi hanno coordinate $V\left(\frac{k}{2};\frac{k^2}{4}\right)$ in quanto a=-1, b=k, c=0, da cui si ottiene l'equazione parametrica del luogo, con parametro k: $\begin{cases} x=\frac{k}{2} \\ y=\frac{k^2}{4} \end{cases}$, eliminando k si ottiene l'equazione cartesiana del luogo dei vertici delle parabole del fascio: $y=x^2$.

Determiniamo ora l'equazione della retta tangente in B alla parabola generica del fascio mediante la formula dello sdoppiamento: $\frac{y+y_0}{2}=axx_0+b\left(\frac{x+x_0}{2}\right)+c$ che fornisce la tangente t alla parabola y=ax²+bx+c nel suo punto di coordinate $(x_0;y_0)$.

t: $\frac{y+0}{2}=-1x\cdot 0+k\left(\frac{x+0}{2}\right) \rightarrow \frac{y}{2}=k\frac{x}{2} \rightarrow y=kx$

Il punto C di intersezione di tale retta con la retta x=k ha coordinate: $C\left(k;k^2\right)$, mentre il punto H proiezione di C sull'asse x ha coordinate: $H(k;0)$. Ci occupiamo ora del calcolo del limite: $\lim_{k\to 0}\frac{\overline{BC}-\overline{BH}}{\overline{CH}\cdot\overline{BH}}$. A tal fine determiniamo le misure dei segmenti coinvolti nel limite.

$\overline{BC}=\overline{OC}=\sqrt{k^2+\left(k^2\right)^2}=\sqrt{k^2\left(1+k^2\right)}=|k|\sqrt{1+k^2}$; $\overline{BH}=|k|$; $\overline{CH}=k^2$. Pertanto si ha:

$$\lim_{k\to 0}\frac{\overline{BC}-\overline{BH}}{\overline{CH}\cdot\overline{BH}}=\lim_{k\to 0}\frac{|k|\sqrt{1+k^2}-|k|}{k^2|k|}=\lim_{k\to 0}\frac{|k|\left(\sqrt{1+k^2}-1\right)}{k^2|k|}=\lim_{k\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+k^2}-1\right)}{k^2}=\frac{0}{0}\ \text{F.I.}$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+k^2}-1\right)}{k^2}=\lim_{k\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+k^2}-1\right)\left(\sqrt{1+k^2}+1\right)}{k^2\left(\sqrt{1+k^2}+1\right)}=\lim_{k\to 0}\frac{\left(1+k^2\right)-1}{k^2\left(\sqrt{1+k^2}+1\right)}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2}{k^2\left(\sqrt{1+k^2}+1\right)}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+k^2}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Dunque: $\lim_{k\to 0}\frac{\overline{BC}-\overline{BH}}{\overline{CH}\cdot\overline{BH}}=\frac{1}{2}$

---

[4] (Problema. n. 459 a pag. 184 U)

Sono date le iperboli equilatere di equazioni: $y=\frac{1-2x}{x+1}$, $y=\frac{3x}{x+1}$. Considera la retta x=h (h<-1) e i punti Q e R di intersezione con le iperboli. Calcola: $\lim_{h\to-\infty}\frac{Area(AOQ)}{Area(AOR)}$, essendo $A(-2;0)$ e O l'origine del sistema di assi cartesiani.

SVOLGIMENTO

$$Q\equiv\begin{cases} x=h \\ y=\frac{1-2x}{x+1} \end{cases};\ \begin{cases} x=h \\ y=\frac{1-2h}{h+1} \end{cases} \rightarrow Q\left(h;\frac{1-2h}{h+1}\right)$$

$$R\equiv\begin{cases} x=h \\ y=\frac{3x}{x+1} \end{cases};\ \begin{cases} x=h \\ y=\frac{3h}{h+1} \end{cases} \rightarrow R\left(h;\frac{3h}{h+1}\right)$$

$$\text{Area(AOQ)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ h & \frac{1-2h}{h+1} & 1 \end{vmatrix}=\ldots=\frac{1}{2}\left|2\frac{1-2h}{h+1}\right|=\left|\frac{1-2h}{h+1}\right|$$

$$\text{Area(AOR)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ h & \frac{3h}{h+1} & 1 \end{vmatrix} = \ldots = \frac{1}{2}\left|2\frac{3h}{h+1}\right| = \left|\frac{3h}{h+1}\right|$$

$$\lim_{h\to-\infty}\frac{Area(AOQ)}{Area(AOR)} = \lim_{h\to-\infty}\frac{\left|\frac{1-2h}{h+1}\right|}{\left|\frac{3h}{h+1}\right|} = \lim_{h\to-\infty}\left|\frac{1-2h}{3h}\right| = \frac{2}{3}$$