SEGNO DEL TRINOMIO DI SECONDO GRADO

Prof. Enrico Sailis – *I.I.S. Gramsci-Amaldi* – Carbonia

Dato il trinomio di secondo grado in x: $P(x) = ax^2 + bx + c$, posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si dimostra che l'equazione associata: $P(x) = 0$ ammette le soluzioni x_1, x_2, per $\Delta \geq 0$ date da:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ci occuperemo ora di stabilire il segno del valore che il trinomio $P(x)$ assume al variare di x nell'insieme dei numeri reali. A tal fine ci avvaliamo della sua scomposizione in fattori, distinguendo tre casi: $\Delta > 0, \Delta = 0 \; e \; \Delta < 0$.

Segno di $P(x)$ nel caso $\Delta > 0$

Immaginiamo ora di far variare x la lungo l'asse numerico da sinistra a destra e posto $x_1 < x_2$, distinguiamo tre intervalli numerici: $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x > x_2$. In ciascuno di essi studiamo il segno di $P(x)$ tenendo conto che

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \mathbf{(2)}$$

come si dimostra utilizzando la formula (1) e svolgendo i calcoli nell'ultimo membro.

Per $x < x_1$, si ha: $(x - x_1) < 0$ e $(x - x_2) < 0$, pertanto risulta: $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ e dunque:

segno di $a(x - x_1)(x - x_2)$ = segno di a

Per $x = x_1$ si ha: $P(x_1) = 0$

Per $x_1 < x < x_2$ si ha: $(x - x_1) > 0$ e $(x - x_2) < 0$, pertanto risulta: $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ e dunque:

segno di $a(x - x_1)(x - x_2)$ = - segno di a

Per $x = x_2$ si ha: $P(x_2) = 0$

Per $x > x_2$, si ha: $(x - x_1) > 0$ e $(x - x_2) > 0$, pertanto risulta: $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ e dunque:

segno di $a(x - x_1)(x - x_2)$ = segno di a

Ricapitolando graficamente i risultati ottenuti, il **segno di $P(x)$ nel caso $\Delta > 0$** è:

	x_1		x_2		x
Segno di a	0	- segno di a	0	segno di a	$(ax^2 + bx + c)$

Ci occupiamo ora del

Segno di $P(x)$ nel caso $\Delta = 0$

Immaginiamo ora di far variare x la lungo l'asse numerico, poichè $x_1 = x_2$ studiamo il segno di $P(x)$ tenendo conto che:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \qquad \mathbf{(3)}$$

come si dimostra utilizzando la formula (1) e svolgendo i calcoli nell'ultimo membro.

Per $x \neq x_1$, si ha: $(x - x_1)^2 > 0$ e dunque:

segno di $a(x - x_1)^2$ = segno di a

Per $x = x_1$ si ha: $P(x_1) = 0$

Ricapitolando graficamente i risultati ottenuti, il **segno di $P(x)$ nel caso** $\Delta = \mathbf{0}$ è:

	$\boldsymbol{x_1}$		$\boldsymbol{x}$
Segno di a	0	Segno di a	$(ax^2 + bx + c)$

Ci occupiamo ora del

Segno di $P(x)$ nel caso $\Delta < 0$

Immaginiamo ora di far variare x la lungo l'asse numerico, studiamo il segno di $P(x)$ tenendo conto che

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right] \qquad \mathbf{(4)}$$

come si dimostra considerando $\Delta = b^2 - 4ac$ e svolgendo i calcoli nell'ultimo membro.

Per qualunque x, si ha: $\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right] > 0$ in quanto $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ e $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ essendo $\Delta < 0$, dunque:

segno di $a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$ = segno di a

Ricapitolando graficamente i risultato ottenuto, il **segno di $P(x)$ nel caso** $\Delta < \mathbf{0}$ è:

	$\boldsymbol{x}$
Segno di a	$(ax^2 + bx + c)$