

SEGNO DEL TRINOMIO DI SECONDO GRADO

Prof. Enrico Sallis – I.I.S. Gramsci-Amaldi – Carbonia

Dato il trinomio di secondo grado in x : $P(x) = ax^2 + bx + c$, posto $\Delta = b^2 - 4ac$, si dimostra che l'equazione associata: $P(x) = 0$ ammette le soluzioni x_1, x_2 , per $\Delta \geq 0$ date da:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1)$$

Ci occuperemo ora di stabilire il segno del valore che il trinomio $P(x)$ assume al variare di x nell'insieme dei numeri reali. A tal fine ci avvaliamo della sua scomposizione in fattori, distinguendo tre casi: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Segno di $P(x)$ nel caso $\Delta > 0$

Immaginiamo ora di far variare x la lungo l'asse numerico da sinistra a destra e posto $x_1 < x_2$, distinguiamo tre intervalli numerici: $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x > x_2$. In ciascuno di essi studiamo il segno di $P(x)$ tenendo conto che

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (2)$$

come si dimostra utilizzando la formula (1) e svolgendo i calcoli nell'ultimo membro.

Per $x < x_1$, si ha: $(x - x_1) < 0$ e $(x - x_2) < 0$, pertanto risulta: $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ e dunque:

$$\text{segno di } a(x - x_1)(x - x_2) = \text{segno di } a$$

Per $x = x_1$ si ha: $P(x_1) = 0$

Per $x_1 < x < x_2$ si ha: $(x - x_1) > 0$ e $(x - x_2) < 0$, pertanto risulta: $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ e dunque:

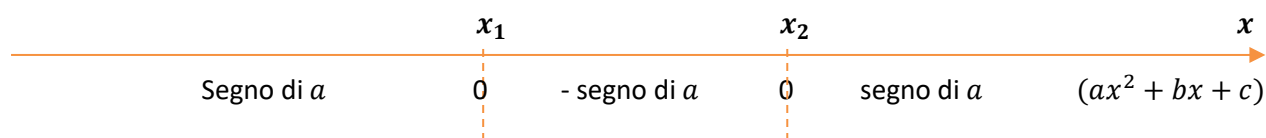
$$\text{segno di } a(x - x_1)(x - x_2) = - \text{segno di } a$$

Per $x = x_2$ si ha: $P(x_2) = 0$

Per $x > x_2$, si ha: $(x - x_1) > 0$ e $(x - x_2) > 0$, pertanto risulta: $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ e dunque:

$$\text{segno di } a(x - x_1)(x - x_2) = \text{segno di } a$$

Ricapitolando graficamente i risultati ottenuti, il **segno di $P(x)$ nel caso $\Delta > 0$** è:



Ci occupiamo ora del

Segno di $P(x)$ nel caso $\Delta = 0$

Immaginiamo ora di far variare x la lungo l'asse numerico, poichè $x_1 = x_2$ studiamo il segno di $P(x)$ tenendo conto che:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \quad (3)$$

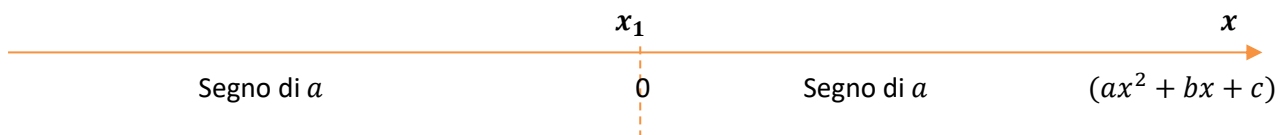
come si dimostra utilizzando la formula (1) e svolgendo i calcoli nell'ultimo membro.

Per $x \neq x_1$, si ha: $(x - x_1)^2 > 0$ e dunque:

$$\text{segno di } a(x - x_1)^2 = \text{segno di } a$$

Per $x = x_1$ si ha: $P(x_1) = 0$

Ricapitolando graficamente i risultati ottenuti, il **segno di $P(x)$ nel caso $\Delta = 0$** è:



Ci occupiamo ora del

Segno di $P(x)$ nel caso $\Delta < 0$

Immaginiamo ora di far variare x la lungo l'asse numerico, studiamo il segno di $P(x)$ tenendo conto che

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] \quad (4)$$

come si dimostra considerando $\Delta = b^2 - 4ac$ e svolgendo i calcoli nell'ultimo membro.

Per qualunque x , si ha: $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] > 0$ in quanto $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ essendo $\Delta < 0$, dunque:

$$\text{segno di } a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] = \text{segno di } a$$

Ricapitolando graficamente i risultato ottenuto, il **segno di $P(x)$ nel caso $\Delta < 0$** è:

