ANNO SCOLASTICO 2016/17

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Risoluzione

Problema 1 – Modello in scala

a) Le curve γ_1 e γ_2 sono continue sull'intervallo $[-1;1]$ e simmetriche rispetto all'asse *y*.

Le funzioni della famiglia $g(x)$ sono pari e continue su $\mathbb{R}$ per qualunque valore dei parametri *c* e *d*.

Le funzioni della famiglia $f(x)$ sono pari ma presentano una discontinuità in $x=\pm\frac{9}{b}$ (si ricordi che i parametri, e quindi anche *b*, sono non nulli) e quindi sono continue su $[-1;1]$ soltanto se $|b|<9$.

Osserviamo che, affinché i grafici delle funzioni passino per i punti di coordinate $A(-1;0)$, $B(0;1)$ e $M(0;-1)$ del riferimento Oxy, i parametri devono valere:

$$\begin{cases} f(\pm 1)=\dfrac{9(1-a)}{9-b}=0 \\ f(0)=-a=-1 \end{cases} \rightarrow \quad a=1, \qquad \begin{cases} g(\pm 1)=\dfrac{2}{c}+d=0 \\ g(0)=d=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=2 \\ d=-1 \end{cases},$$

unitamente alla condizione $|b|<9$.

Pertanto non possiamo giustificare gli accoppiamenti in base a semplici considerazioni sui valori noti delle funzioni. Passiamo a considerazioni sulle derivate; conviene scrivere le due funzioni come definite a tratti:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=-\dfrac{9(x+1)}{9+bx} & \text{se } -1\le x<0 \\ f_2(x)=\dfrac{9(x-1)}{9-bx} & \text{se } 0\le x\le 1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} g_1(x)=\dfrac{x^4+\sqrt{-x}}{2}-1 & \text{se } -1\le x<0 \\ g_2(x)=\dfrac{x^4+\sqrt{x}}{2}-1 & \text{se } 0\le x\le 1 \end{cases}$$

Sfruttiamo la parità delle funzioni, ricordando che la derivata prima di una funzione pari è dispari, cosicché da $f_1(x)=f_2(-x)$ otteniamo $f_1'(x)=-f_2'(-x)$, e analogamente per la funzione $g(x)$. La derivata prima delle due funzioni è:

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x)=-\dfrac{9(9-b)}{(9+bx)^2} & \text{se} -1\le x<0 \\ f_2'(x)=\dfrac{9(9-b)}{(9-bx)^2} & \text{se } 0<x\le 1 \end{cases} \qquad g'(x)=\begin{cases} g_1'(x)=\dfrac{8x^3\sqrt{-x}-1}{4\sqrt{-x}} & \text{se} -1\le x<0 \\ g_2'(x)=\dfrac{8x^3\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}} & \text{se } 0<x\le 1 \end{cases}$$

La curva γ_1 presenta un punto angoloso in $x=0$, mentre la curva γ_2 presenta una cuspide in $x=0$. La sola funzione che può presentare una cuspide in $x=0$ è la funzione $g(x)$, in quanto $\lim_{x\to 0^\pm} g'(x)=\pm\infty$.

Pertanto l'unica associazione possibile è la seguente:

$$\gamma_1 \leftrightarrow f(x), \qquad \gamma_2 \leftrightarrow g(x).$$

b) Abbiamo già ricavato i valori $a=1$, $c=2$, $d=-1$ e la condizione $|b|<9$; rimane da determinare il parametro *b*. Imponiamo la tangenza della curva γ_1 nel punto *B* alla retta *BC*:

$$f'(1)=m_{BC}.$$

Poiché si deduce dalla figura che nel riferimento Oxy è $C\left(\frac{5}{9};-1\right)$, ricaviamo $m_{BC}=\dfrac{1}{1-\frac{5}{9}}=\dfrac{9}{4}$,

da cui:

$$f'(1)=m_{BC} \quad \to \quad \frac{9}{(9-b)}=\frac{9}{4} \quad \to \quad b=5.$$

Per controllo, verifichiamo che anche la curva γ_2 è tangente in *B* alla retta *BC*:

$$g'(1)=\frac{8\cdot 1^3\cdot\sqrt{1}+1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{1}}=\frac{9}{4}=m_{BC}.$$

Le due funzioni risultano quindi essere:

$$f(x)=\frac{9(|x|-1)}{9-5|x|}, \qquad g(x)=\frac{x^4+\sqrt{|x|}}{2}-1.$$

c) Abbiamo già calcolato la derivata prima delle due funzioni al punto a); riscriviamole, sostituendo nell'espressione di $f'(x)$ il valore di *b* trovato:

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x)=-\dfrac{36}{(9+5x)^2} & \text{se } -1\le x<0 \\ f_2'(x)=\dfrac{36}{(9-5x)^2} & \text{se } 0<x\le 1 \end{cases} \qquad g'(x)=\begin{cases} g_1'(x)=\dfrac{8x^3\sqrt{-x}-1}{4\sqrt{-x}} & \text{se } -1\le x<0 \\ g_2'(x)=\dfrac{8x^3\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}} & \text{se } 0<x\le 1 \end{cases}$$

Limitatamente all'intervallo $-1\le x\le 1$, entrambe le funzioni presentano un solo punto di non derivabilità in $x=0$; in particolare:

- la funzione $f(x)$ presenta in $x=0$ un punto angoloso, infatti:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-\frac{4}{9}\neq \lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\frac{4}{9};$$

- la funzione $g(x)$ presenta in $x=0$ una cuspide, infatti:

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} g'(x)=+\infty;$$

Calcoliamo le derivate seconde $f_2''(x)$ e $g_2''(x)$; sempre sfruttando la simmetria di $f(x)$ e $g(x)$, sarà poi $f_1''(x)=f_2''(-x)$ e $g_1''(x)=g_2''(-x)$, cioè le derivate seconde sono funzioni pari.

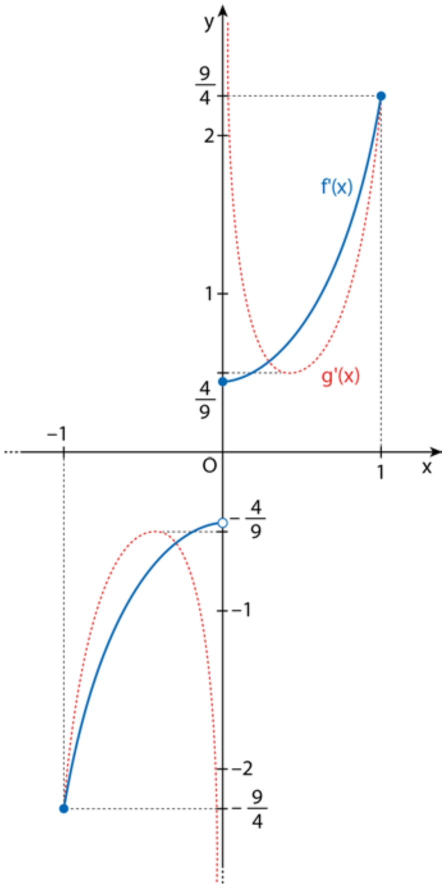
$$f_2''(x)=\frac{360}{(9-5x)^3} \quad \text{se } 0<x\le 1, \qquad g_2''(x)=\frac{48x^{\frac{7}{2}}-1}{8x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{se } 0<x\le 1.$$

Per $0<x\le 1$ è $f_2''(x)>0$, quindi $f_2'(x)$ è sempre crescente; per simmetria, anche per $-1\le x<0$ è $f_1''(x)>0$, quindi $f_1'(x)$ è sempre crescente.

Nell'intervallo $0<x\le 1$, $g_2''(x)$ si annulla in $\alpha=\left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{2}{7}}\cong 0{,}33$, è negativa in $0<x<\alpha$ e positiva per $x>\alpha$; di conseguenza, $x=\left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{2}{7}}$ è un punto di minimo per $g'(x)$ e, per simmetria, $x=-\left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{2}{7}}$ è un punto di massimo per $g'(x)$. In corrispondenza abbiamo:

$$g_2'(x)=\frac{8x^{\frac{7}{2}}+1}{4x^{\frac{1}{2}}} \quad \rightarrow \quad g_2'\left(\left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{2}{7}}\right)=\frac{8\left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}}+1}{4\left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{7}{24}(48)^{\frac{1}{7}}\cong 0{,}507\,.$$

Tracciamo sotto i grafici probabili delle funzioni $f'(x)$ e $g'(x)$ in uno stesso riferimento.



d) Il volume iniziale V_0 del prisma è dato da:

$$V_0 = A_{base} \cdot altezza = \frac{\left(2+\frac{10}{9}\right)\cdot 1}{2}\cdot 3 = \frac{14}{3}\,\mathrm{m}^3 \cong 4{,}667\,\mathrm{m}^3.$$

Si tratta ora di calcolare il volume V compreso tra le superfici delimitate dalle sagome relative alle curve γ_1 e γ_2, cioè il prodotto tra la superficie compresa tra i grafici delle funzioni $g(x)$ e $f(x)$ e l'altezza del prisma. Per la simmetria delle curve possiamo calcolare:

$$V = 3\int_{-1}^{1}[g(x) - f(x)]dx = 3\cdot 2\int_0^1\left[\frac{x^4+\sqrt{x}}{2} - 1 - \frac{9(x-1)}{9-5x}\right]dx =$$

$$= 6\int_0^1\left[\frac{x^4}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}-1+\frac{9}{5}+\frac{36}{25}\cdot\frac{5}{5x-9}\right]dx = 6\left[\frac{x^5}{10}+\frac{x\sqrt{x}}{3}-x+\frac{9}{5}x+\frac{36}{25}\ln|5x-9|\right]_0^1 =$$

$$= 6\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{3}-1+\frac{9}{5}+\frac{36}{25}\ln 4-\frac{36}{25}\ln 9\right) = 6\left(\frac{37}{30}+\frac{72}{25}\ln\frac{2}{3}\right) = \frac{37}{5}+\frac{432}{25}\ln\frac{2}{3} \cong 0{,}394\,\mathrm{m}^3$$

per cui:

$$\frac{V}{V_0}\times 100 \cong \frac{39{,}4}{4{,}667} \cong 8{,}44\%.$$

e) La curva γ_3 di equazione $y = kx^4 + h$ deve essere tangente in $A(-1;0)$ e $B(1;0)$ alle rette rispettivamente *AD* e *BC*, quindi:

$$\begin{cases} y(\pm 1) = k + h = 0 \\ y'(-1) = -4k = -\frac{9}{4} \\ y'(+1) = 4k = \frac{9}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k+h=0 \\ 4k = \frac{9}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = -\frac{9}{16} \\ k = \frac{9}{16} \end{cases}$$

L'equazione della curva γ_3 è pertanto:

$$y = \frac{9}{16}x^4 - \frac{9}{16}.$$

Problema 2

a) Valutiamo l'andamento di $f''(x)$.

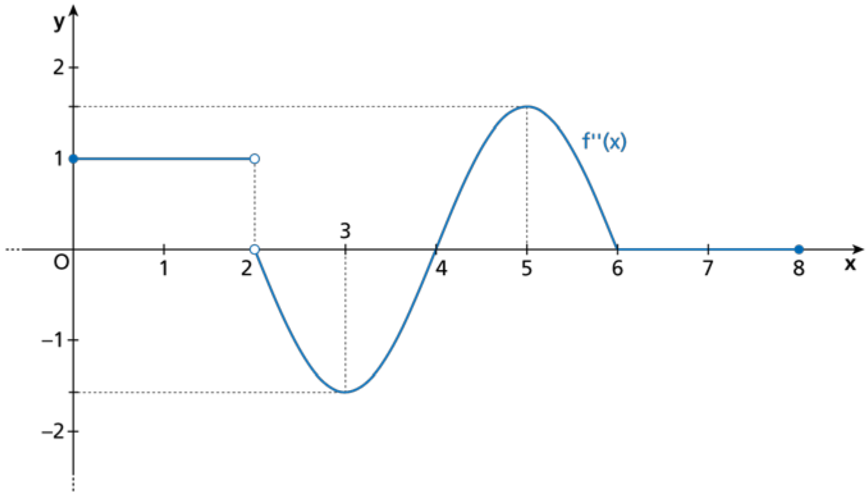
Per $0 \le x < 2$, $f'(x)$ è individuata da un segmento di pendenza 1, quindi $f''(x) = 1$ in tale intervallo.

La funzione $f'(x)$ non è definita in $x = 2$, dove presenta una discontinuità di I specie, quindi anche la funzione $f''(x)$ non è definita in $x = 2$.

Per $2 < x \le 8$, la funzione $f'(x)$ è derivabile, in quanto il tratto B_2F, di tipo sinusoidale e quindi derivabile, si raccorda senza punto angoloso col tratto FG; risulta allora:

- $\lim_{x\to 2^+} f''(x) = 0$ poiché, per $x \to 2^+$, l'arco B_2C ammette la retta orizzontale $y = 1$ come tangente;
- $f''(x) < 0$ per $2 < x < 4$, poiché $f'(x)$ è descrescente in tale intervallo;
- $f''(x) > 0$ per $4 < x < 6$, poiché $f'(x)$ è crescente in tale intervallo;
- $f''(x) = 0$ per $x = 4$ e per $6 \le x \le 8$;
- $f'(x)$ cambia di concavità in $x = 3$ e in $x = 5$, quindi $f''(x)$ presenta punti estremanti per $x = 3$ e in $x = 5$ (un minimo relativo per $x = 3$, un massimo relativo per $x = 5$).

Disegniamo un grafico plausibile per $f''(x)$.



Per ricavare le caratteristiche di $f(x)$, possiamo identificarla con la funzione integrale $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$. Osservando l'andamento dell'area del sottografico, e date le ipotesi, possiamo concludere che:

- per $0 \le x \le 2$, $f(x) = \int_0^x t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2$; il grafico di $f(x)$ è un arco di parabola con $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$;
- $f(x)$ è continua in $x = 2$ (per ipotesi è continua in $0 \le x \le 8$), ma presenta un punto angoloso con semitangente sinistra di pendenza 2 e semitangente destra di pendenza 1, in quanto $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 2$ e $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 1$;
- per $2 \le x \le 6$, si ha un andamento del grafico di $f(x)$ di tipo sinusoidale, crescente in $2 < x < 3$ e in $5 < x < 6$ (dove $f'(x) > 0$) e decrescente in $3 < x < 5$ (dove $f'(x) < 0$), con un massimo relativo in $x = 3$ e un minimo relativo in $x = 5$;
- vista l'ipotesi sulle aree dei sottografici di $f'(x)$, possiamo dire che:

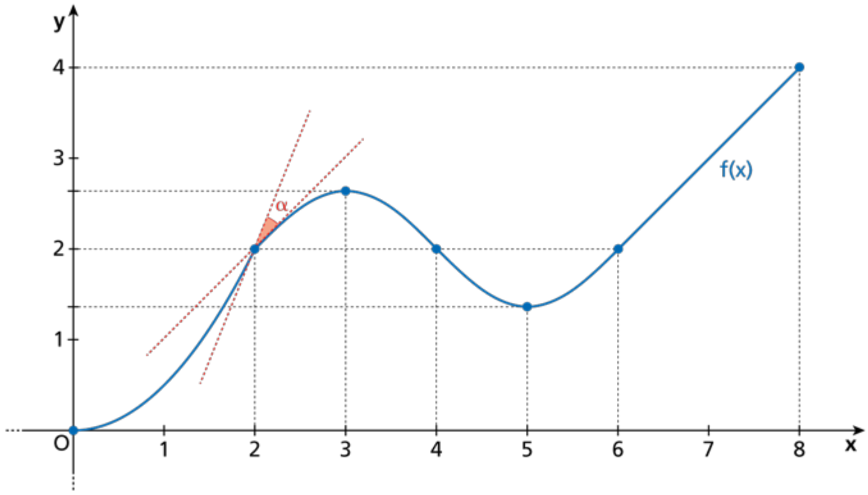
$$f(4) = f(2) + \int_2^3 f'(t)\,dt + \int_3^4 f'(t)\,dt = 2 + S - S = 2,$$

  e analogamente $f(6) = 2$;
- per $6 \le x \le 8$, il grafico di $f(x)$ è un segmento di retta con pendenza 1 e passante per il punto $(6;2)$: l'espressione analitica della funzione in tale tratto è dunque:

$$f(x) - 2 = 1\cdot(x-6) \quad \to \quad f(x) = x - 4;$$

- il massimo valore di $f(x)$ corrisponde all'area totale del sottografico di $f'(x)$, cioè 4, valore che la funzione assume in $x=8$.

Disegniamo un grafico plausibile per $f(x)$.



b) Per quanto detto al punto precedente, le semirette tangenti da sinistra e da destra al grafico di $f(x)$ in $x=2$ hanno rispettivamente pendenza:

$$m_1 = \tan\alpha_1 = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 2 \text{ e } m_2 = \tan\alpha_2 = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 1.$$

Ricaviamo l'ampiezza dell'angolo acuto $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ individuato dalle due tangenti:

$$\tan\alpha = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} = \frac{2-1}{1+2\cdot 1} = \frac{1}{3},$$

da cui:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \cong 18,435° \cong 18°\ 26'\ 6''.$$

c) Osserviamo innanzi tutto che $\dfrac{f(6)-f(0)}{6-0} = \dfrac{2-0}{6} = \dfrac{1}{3}$.

- L'affermazione 1 è falsa poiché non sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange, infatti $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[0;6]$ ma non derivabile nell'intervallo aperto $]0;6[$.

- L'affermazione 2 è falsa perché la negazione delle ipotesi del teorema di Lagrange non implica la negazione della tesi.

- L'affermazione 3 è vera; come si può verificare direttamente dal grafico di $f'(x)$, infatti, $f'(x) = \dfrac{1}{3}$ è verificata per 3 valori di x nell'intervallo $]0;6[$.

d) Al punto a) abbiamo trovato che $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ per $0 \le x \le 2$, quindi $a = \dfrac{1}{2}$.

Affinché la sinusoide compia una oscillazione completa nell'intervallo $2 \le x \le 6$, il suo periodo deve essere 4, cioè:

$$\frac{2\pi}{c}=4 \quad \to \quad c=\frac{\pi}{2}$$

e quindi, per continuità nel punto di ascissa $x=2$:

$$b-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)=2 \quad \to \quad b=2 .$$

Ricavando il grafico di $f(x)$ abbiamo dedotto che per $6 \le x \le 8$ è $f(x)=x-4$, quindi $d=1$ ed $e=-4$.

Pertanto:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 2-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } 2 < x < 6 \\ x-4 & \text{se } 6 \le x \le 8 \end{cases}$$

e quindi:

$$f'(x)=\begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } 2 < x < 6 \\ 1 & \text{se } 6 \le x \le 8 \end{cases} \qquad f''(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } 2 < x < 6 \\ 0 & \text{se } 6 \le x \le 8 \end{cases}$$

Le funzioni analitiche così determinate sono coerenti con i grafici qualitativi disegnati.

e) Per calcolare il valor medio integrale $\overline{f}$ di $f(x)$ nell'intervallo $[0;8]$, cioè:

$$\overline{f}=\frac{1}{8}\int_0^8 f(x)dx ,$$

dobbiamo calcolare l'area del sottografico di $f(x)$. Possiamo ricavare tale area in modo esatto anche senza effettuare esplicitamente il calcolo dei vari integrali coinvolti:

- per il teorema di Archimede, che afferma che l'area di un segmento parabolico è pari a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo ad esso circoscritto, otteniamo che l'area del sottografico nell'intervallo $0 \le x \le 2$ misura $4-\frac{2}{3}4=\frac{4}{3}$;
- nell'intervallo $2 \le x \le 6$, per la simmetria della sinusoide rispetto alla retta di equazione $y=2$, il sottografico è equivalente al rettangolo di base 4 e altezza 2, la cui area misura 8;
- il sottografico nel tratto $6 \le x \le 8$ è un trapezio rettangolo, di area 6.

Concludiamo che l'area totale del sottografico misura $\frac{4}{3}+8+6=\frac{46}{3}$, per cui:

$$\overline{f}=\frac{1}{8}\cdot\frac{46}{3}=\frac{23}{12} .$$

Il volume $\bar{V}$ del cilindro ottenuto dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse del sottografico della funzione costante $y = \bar{f}$ nell'intervallo $[0;8]$ è:

$$\bar{V} = 8\pi\left(\frac{23}{12}\right)^2 = \frac{529}{18}\pi \cong 92,33\,.$$

Per il calcolo del volume V del solido che si ottiene ruotando il grafico della funzione $f(x)$ di 360° intorno all'asse delle ascisse, procediamo con il calcolo dei seguenti integrali:

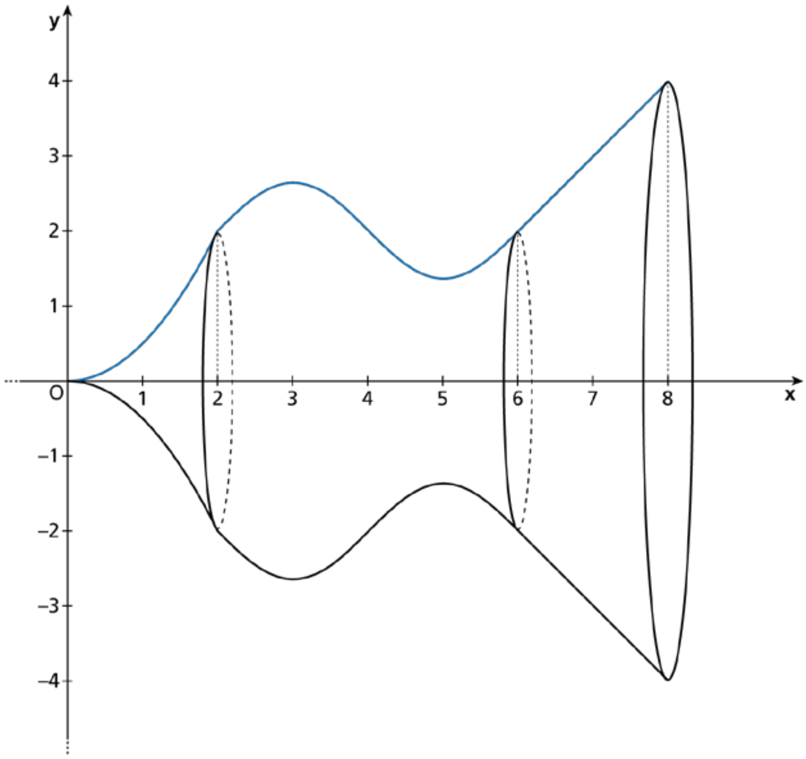
$$V = \pi\left\{\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx + \int_2^6\left[2-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]^2 dx + \int_6^8 (x-4)^2\,dx\right\} =$$

$$= \pi\left\{\left[\frac{x^5}{20}\right]_0^2 + [4x]_2^6 + \frac{4}{\pi^2}\int_2^6 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx - \frac{8}{\pi}\int_2^6 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx + \left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_6^8\right\} =$$

$$= \pi\left\{\frac{8}{5} + 16 + \frac{8}{\pi^3}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_\pi^{3\pi} - \frac{16}{\pi^2}[-\cos t]_\pi^{3\pi} + \frac{56}{3}\right\} =$$

$$= \pi\left[\frac{8}{5} + 16 + \frac{8}{\pi^2} - 0 + \frac{56}{3}\right] = \pi\left[\frac{544}{15} + \frac{8}{\pi^2}\right] = \frac{544\pi}{15} + \frac{8}{\pi} \cong 116{,}48,$$

dove abbiamo effettuato la sostituzione $t = \frac{\pi}{2}x$ e applicato la formula $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ per la risoluzione degli integrali delle funzioni goniometriche.



La differenza, in percentuale rispetto a V, tra i due volumi è quindi:

$$\frac{V-\bar{V}}{V}\times 100 \cong \frac{116{,}48 - 92{,}33}{116{,}48}\times 100 \cong 20{,}7\%\,.$$

Questionario

1. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione integrale $F(x)=\int_1^{x^2} f(t)\,dt$ ammette derivata prima nell'intervallo $[1;+\infty[$ e risulta:

$$F'(x)=\mathrm{D}\left[x^2\right]\cdot f\left(x^2\right)=2x\cdot f\left(x^2\right).$$

Dato che $y=8x-1$ è l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa $x=2$ e ordinata $y=8\cdot 2-1=15$, otteniamo che il grafico di $F(x)$ passa per il punto di coordinate $(2;15)$ e che in tale punto la retta tangente ha coefficiente angolare 8, quindi:

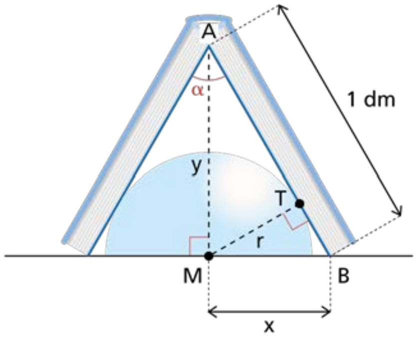
$$F(2)=\int_1^4 f(t)\,dt=15,$$

$$F'(2)=4f(4)=8 \quad\rightarrow\quad f(4)=2.$$

Possiamo così calcolare il valor medio integrale di $f(x)$ relativo all'intervallo $[1;4]$:

$$\overline{f}=\frac{1}{4-1}\cdot\int_1^4 f(t)\,dt=\frac{15}{3}=5.$$

2. Indichiamo con T il punto in cui la semisfera è tangente alla copertina.



Detto r il raggio della semisfera, risulta $\overline{MT}=r$.
Posto $y=\overline{MA}$ e $x=\overline{MB}$, per la similitudine dei triangoli rettangoli MTA e BMA abbiamo:

$$\frac{y}{r}=\frac{1}{x} \quad\rightarrow\quad y=\frac{r}{x}$$

e per il teorema di Pitagora applicato al triangolo BMA:

$$y^2+x^2=1^2 \quad\rightarrow\quad \frac{r^2}{x^2}+x^2=1.$$

Scelta x come variabile indipendente del problema, con $0<x<1$, possiamo esprimere il raggio della semisfera in funzione di x:

$$r^2=x^2-x^4 \quad\rightarrow\quad r(x)=\sqrt{x^2-x^4}.$$

Poiché il fermacarte deve avere il massimo raggio possibile, cerchiamo il valore massimo di $r(x)$. Considerato che la funzione radice è strettamente crescente, $r(x)$ assume il massimo quando il suo radicando assume valore massimo; per semplificare i calcoli, ricorriamo dunque allo studio della derivata prima del solo radicando:

$$\mathrm{D}\left[x^2-x^4\right]=2x-4x^3=2x\left(1-2x^2\right),$$

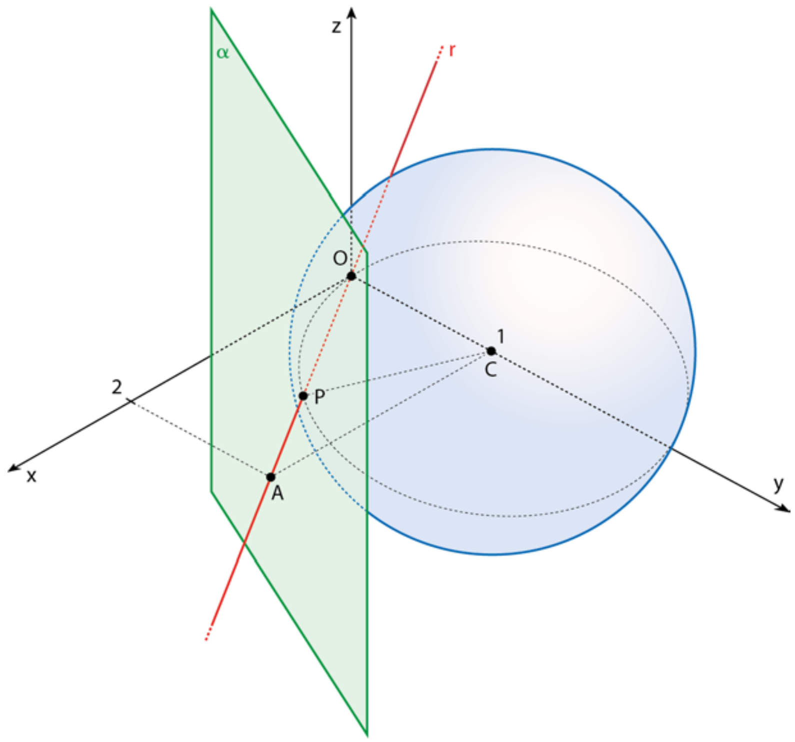
$$\mathrm{D}\left[x^2-x^4\right]=0 \quad\to\quad x=0 \quad\vee\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'unico zero positivo del polinomio è $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}71\,\mathrm{dm}$; analizzando anche il segno della derivata, possiamo concludere che in corrispondenza di $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha la semisfera di raggio massimo $r=\frac{1}{2}$. Quindi l'ipotesi del problema implica che sia:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=x \quad\to\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\to\quad \alpha=2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=90°.$$

3. La superficie sferica di raggio unitario e tangente nell'origine al piano $y=0$ ha centro nel punto $C(0;1;0)$; la sua equazione è:

$$x^2+(y-1)^2+z^2=1.$$



La retta r passante per O e per $A(2;1;0)$ ha vettore direzione $\overrightarrow{OA}=(2;1;0)$ ed equazione parametrica:

$$r:\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Troviamo le intersezioni fra r e la superficie sferica sostituendo nell'equazione della superficie le coordinate $(2t;t;0)$ dei punti di r:

$$(2t)^2+(t-1)^2=1 \;\rightarrow\; 4t^2+t^2-2t+1=1 \;\rightarrow\; 5t^2-2t=0 \;\rightarrow\; t(5t-2)=0 \;\rightarrow$$
$$t=0 \;\vee\; t=\frac{2}{5}.$$

Sostituendo i due valori di t nell'equazione della retta r otteniamo i punti $(0;0;0)$ e $\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5};0\right)$, pertanto le coordinate del punto P distinto da O in cui r incontra la superficie della sfera sono:

$$P\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5};0\right).$$

Il piano α tangente in P alla sfera deve essere ortogonale al raggio CP, quindi il piano ha vettore direzione $\overrightarrow{CP}=\left(\frac{4}{5}-0;\frac{2}{5}-1;0-0\right)=\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5};0\right)$ e la sua equazione è del tipo:

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+d=0.$$

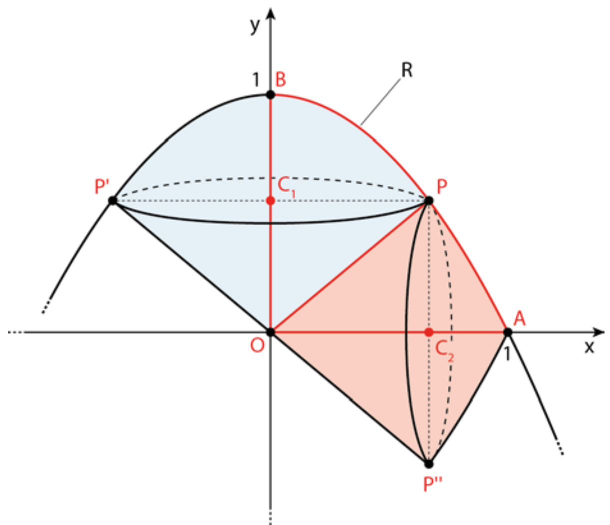
Imponendo il passaggio del piano per il punto P, ricaviamo:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+d=0 \;\rightarrow\; d=-\frac{16}{25}+\frac{6}{25}=-\frac{10}{25}=-\frac{2}{5}.$$

L'equazione del piano α è dunque:

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{2}{5}=0 \;\rightarrow\; 4x-3y-2=0.$$

4. Schematizziamo la situazione in figura.



Ricaviamo le coordinate del punto P mettendo a sistema l'equazione della parabola con l'equazione della retta:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = \dfrac{5}{6}x \end{cases} \quad \rightarrow \quad 6x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad P\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{9}\right).$$

Calcoliamo il volume V_1 del primo solido di rotazione sommando il volume del paraboloide definito dalla rotazione dell'arco BP intorno all'asse y al volume del cono di raggio $\overline{PC_1} = \frac{2}{3}$ e altezza $\overline{OC_1} = \frac{5}{9}$. Osservato che $x = \sqrt{1-y}$ è l'espressione dell'ascissa dei punti dall'arco BP in funzione della loro ordinata, risulta:

$$V_1 = \pi \int_{\frac{5}{9}}^{1} (1-y)\, dy + \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{9} = \pi \left[y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{5}{9}}^{1} + \frac{20}{243}\pi = \frac{8}{81}\pi + \frac{20}{243}\pi = \frac{44}{243}\pi.$$

In modo analogo, calcoliamo il volume V_2 del secondo solido come somma del solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x dell'arco AP e del volume del cono di raggio $\overline{PC_2} = \frac{5}{9}$ e altezza $\overline{OC_2} = \frac{2}{3}$:

$$V_2 = \pi \int_{\frac{2}{3}}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx + \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \pi \left[x + \frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 \right]_{\frac{2}{3}}^{1} + \frac{50}{729}\pi = \frac{46}{1215}\pi + \frac{50}{729}\pi = \frac{388}{3645}\pi.$$

Il rapporto fra i due volumi risulta dunque:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{44\pi}{243} \cdot \frac{3645}{388\pi} = \frac{165}{97}.$$

5. Utilizziamo l'identità $A = e^{\ln A}$ e riscriviamo la funzione $f(x)$ nella forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x \ln|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione risulta quindi definita, continua e derivabile per ogni $x \neq 0$.
Valutiamo la continuità nel punto $x = 0$; dobbiamo confrontare il valore della funzione $f(0) = 1$ con il limite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{x \ln|x|}.$$

L'esponente si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$; per risolverla scriviamo

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln|x| = \lim_{x \to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}$$

e applichiamo il teorema di De l'Hospital, osservando che entrambe le funzioni $\ln|x|$ e $\frac{1}{x}$ sono definite, continue e derivabili in un intorno di $x=0$ (escluso $x=0$) e con $\mathrm{D}\left[\frac{1}{x}\right]\neq 0$ in tale intorno. Otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Il limite della funzione è dunque:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{x\ln|x|} = e^0 = 1 = f(0),$$

pertanto la funzione è continua anche in $x=0$ e quindi lo è in tutto $\mathbb{R}$.

Riguardo alla derivabilità, calcoliamo la derivata prima di $f(x)$ per $x\neq 0$:

$$f'(x) = e^{x\ln|x|}\left(\ln|x|+1\right).$$

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale in $x=0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln|h|}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{h\ln|h|}-1}{h\ln|h|}\cdot\ln|h|\right) = 1\cdot\lim_{h\to 0}\ln|h| = -\infty,$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo applicato il limite notevole:

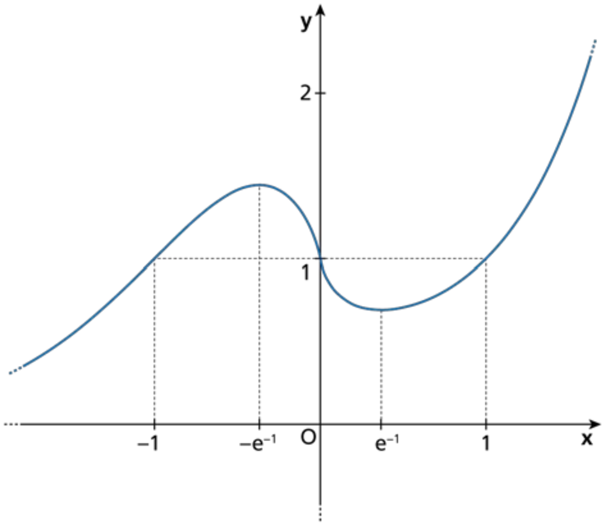
$$\lim_{g(x)\to 0}\frac{e^{g(x)}-1}{g(x)} = 1.$$

In conclusione, $f(x)$ non è derivabile in $x=0$, dove presenta un punto di non derivabilità a tangente verticale (l'asse delle ordinate).

La derivata si annulla quando:

$$\ln|x|+1=0 \quad\to\quad \ln|x|=-1 \quad\to\quad |x|=e^{-1} \quad\to\quad x=\pm e^{-1}.$$

In tali punti il grafico di $f(x)$ presenta un minimo e un massimo relativi.



I limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ sono calcolabili in modo diretto:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln|x|} = e^{(-\infty)\cdot(+\infty)} = e^{-\infty} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln|x|} = e^{(+\infty)\cdot(+\infty)} = e^{+\infty} = +\infty.$$

6. Ricaviamo la distribuzione di probabilità associata alla variabile casuale $X = n$, essendo n il resto della divisione $S:4$ al variare della somma S dei punteggi di due dadi a sei facce:

$$p(n=0) = p(S=4) + p(S=8) + p(S=12) = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4};$$

$$p(n=1) = p(S=5) + p(S=9) = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{2}{9};$$

$$p(n=2) = p(S=2) + p(S=6) + p(S=10) = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{4};$$

$$p(n=3) = p(S=3) + p(S=7) + p(S=11) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{18}.$$

La probabilità che in una data ora di lezione siano interrogati 3 studenti è dunque:

$$p(n=3) = \frac{5}{18} \cong 28\%.$$

Per calcolare il numero medio di ore necessario a interrogare tutta la classe, se questa conta 28 studenti, partiamo dal calcolo del numero medio $\bar{n}$ di interrogati in una data ora:

$$\bar{n} = 0\cdot p(n=0) + 1\cdot p(n=1) + 2\cdot p(n=2) + 3\cdot p(n=3) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{5}{18} = \frac{56}{36} = \frac{14}{9}.$$

Pertanto, il numero medio $\bar{x}$ di ore necessario a interrogare 28 studenti si ottiene risolvendo:

$$\bar{x}\cdot\bar{n} = 28 \quad \to \quad \bar{x} = 28\cdot\frac{9}{14} = 18 \text{ ore.}$$

7. Osserviamo innanzi tutto che la funzione $f(x)$ è definita e continua per $x > -1$, la funzione $g(x)$ è definita e continua su $\mathbb{R}$ e che entrambe le funzioni si annullano, per definizione, in $x = 0$:

$$f(0) = \int_0^0 \sin t\cdot\ln(t+1)\,dt = 0, \qquad g(0) = \int_0^0 t\left(e^t - 1\right)dt = 0,$$

quindi i loro grafici passano per l'origine *O* del sistema di riferimento.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, le funzioni integrali $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili per ogni valore x per il quale le funzioni integrande sono definite e continue, e in tali punti vale:

$$f'(x) = \mathrm{D}\left[\int_0^x \sin t\cdot\ln(t+1)\,dt\right] = \sin x\cdot\ln(x+1) \quad \to \quad f'(0) = 0,$$

$$g'(x) = \mathrm{D}\left[\int_0^{2x} t\left(e^t-1\right)dt\right] = 2x\left(e^{2x}-1\right)\cdot\mathrm{D}[2x] = 4x\left(e^{2x}-1\right) \quad \to \quad g'(0) = 0.$$

Pertanto, i grafici di entrambe le funzioni sono tangenti all'asse x nel loro punto di ascissa $x = 0$.

Per quanto riguarda il limite $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}$, otteniamo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per la quale sono valide le ipotesi del teorema di De l'Hospital: $f(x)$ e $g(x)$ sono definite in un intorno I di $x=0$, sono continue in $x=0$ con $f(0)=g(0)=0$, sono derivabili in $I-\{0\}$ con $f'(x)\neq 0$ in $I-\{0\}$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(e^{2x}-1\right)}{\sin x\cdot\ln(x+1)}.$$

Riconduciamo il limite ottenuto al prodotto di limiti notevoli:

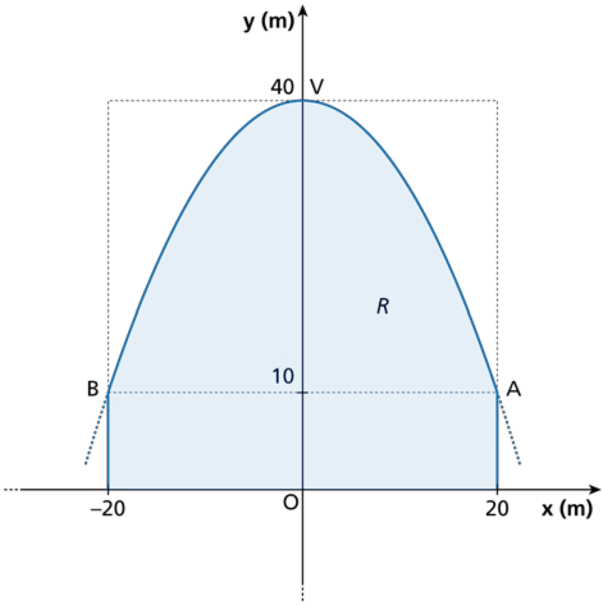
$$\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(e^{2x}-1\right)}{\sin x\cdot\ln(x+1)}=8\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=8.$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=8.$$

8. La funzione $f(x)$ rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso il basso e il cui vertice ha coordinate $(0;40)$. Assieme alle rette di equazione $x=\pm 20$ e all'asse x delimita la regione R in figura.

Sostituendo i valori $x=\pm 20$ nell'espressione di $f(x)$ troviamo $f(x)=40-\frac{3}{40}\cdot 400=10$, quindi i punti di intersezione tra il grafico di $f(x)$ e le rette di equazione $x=\pm 20$ hanno coordinate $A(20;10)$ e $B(-20;10)$.



Calcoliamo l'area di R come somma dell'area di un rettangolo di base 40 m e altezza 10 m e dell'area del segmento parabolico individuato dall'arco AVB:

$$A(R)=40\cdot 10+\frac{2}{3}\cdot 40\cdot 30=400+800=1200\ \text{m}^2\ .$$

Per il calcolo del volume dell'edificio, applichiamo il metodo delle sezioni parallele. Ogni sezione corrispondente all'ascissa x è un rettangolo di area:

$$S(x)=f(x)\cdot h(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{1600}x^4-6x^2+1600\right).$$

Integriamo sull'intervallo $[-20;20]$ di variazione della x; osservando che $S(x)$ è una funzione pari, otteniamo:

$$V=\int_{-20}^{20}S(x)\,dx=2\int_0^{20}S(x)\,dx=\int_0^{20}\left(\frac{9}{1600}x^4-6x^2+1600\right)dx=$$

$$=\left[\frac{9}{8000}x^5-2x^3+1600x\right]_0^{20}=\frac{9}{8000}\cdot 20^5-2\cdot 20^3+1600\cdot 20=19\,600\ \text{m}^3.$$

9. Il grafico di $f(x)$ è tangente in un punto del primo quadrante alla retta di equazione $y=-2x+4$, che ha coefficiente angolare $m=-2$. In tale punto deve quindi essere:

$$f'(x)=-2\ \rightarrow\ x^3-3x=-2\ \rightarrow\ x^3-3x+2=0\ \rightarrow\ (x-1)\left(x^2+x-2\right)=0\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ (x-1)(x-1)(x+2)=0\ \rightarrow\ x=1\ \vee\ x=-2,$$

e solo nel caso $x=1$ il punto di tangenza appartiene al primo quadrante. Tale punto ha coordinate $T(1;2)$.

La generica primitiva della funzione $f'(x)$ è:

$$\int f'(x)\,dx=\int\left(x^3-3x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+c\ .$$

Individuiamo, tra le funzioni della famiglia, quella il cui grafico passa per T:

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+c=2\ \rightarrow\ c=2-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{13}{4}\ .$$

La funzione cercata è dunque:

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{4}.$$

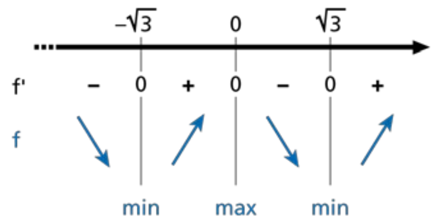
La funzione $f(x)$ è pari, in quanto la variabile x è elevata a potenze pari:

$$f(-x)=\frac{(-x)^4}{4}-\frac{3}{2}(-x)^2+\frac{13}{4}=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{4}=f(x)\ .$$

Per disegnare il grafico di $f(x)$, consideriamo che:

- la funzione è simmetrica rispetto all'asse y;
- $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$; non ci sono asintoti obliqui poiché la funzione è un polinomio di quarto grado;
- $f'(x)=x^3-3x\ \rightarrow\ x^3-3x=0\ \rightarrow\ x\left(x^2-3\right)=0\ \rightarrow\ x=0\ \vee\ x=-\sqrt{3}\ \vee\ x=\sqrt{3}$;

compiliamo il grafico dei segni di $f'(x)$, determinando quando $f(x)$ è crescente o decrescente:

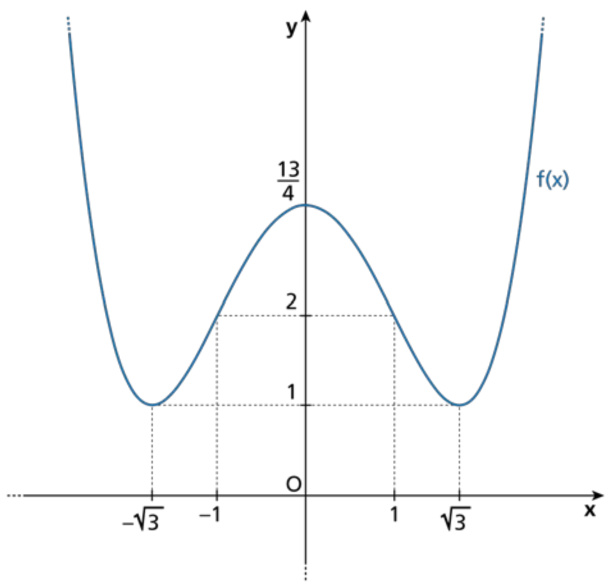


- $f''(x)=3x^2-3 \quad \to \quad 3x^2-3=0 \quad \to \quad 3\left(x^2-1\right)=0 \quad \to \quad x=-1 \vee x=1$,
  con $f''(x)>0$ per $x<-1 \vee x>1$ e $f''(x)<0$ per $-1<x<1$,
  quindi $x=-1$ e $x=1$ sono punti di flesso;
- $f(0)=\dfrac{13}{4}, \quad f\left(\pm\sqrt{3}\right)=1, \quad f(\pm 1)=2$.

Quindi la funzione ha:

- un massimo relativo nel punto $\left(0;\dfrac{13}{4}\right)$;
- due minimi relativi nei punti $\left(\pm\sqrt{3};1\right)$ che sono anche punti di minimo assoluto;
- un flesso discendente in $(-1;2)$ e un flesso ascendente in $(1;2)$.

Possiamo tracciare un grafico plausibile di $f(x)$.



In generale, se $f(x)$ è una funzione pari, allora:

- $f(-x)=f(x)$;
- $f'(-x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[-\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right]=-f'(x)$,
  quindi $f'(x)$ è dispari;
- $f''(-x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(-x+h)-f'(-x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{-f'(x-h)+f'(x)}{h}\right]=$

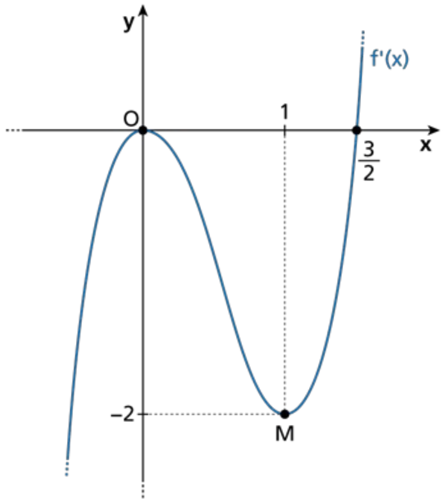
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right] = f''(x),$$

quindi $f''(x)$ è pari.

10. a) Per ipotesi la funzione $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$, quindi $f'(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$. Analizzando il grafico di $f(x)$ osserviamo che:

- $f(x)$ è decrescente per $x < \frac{3}{2}$ e crescente per $x > \frac{3}{2}$, quindi $f'(x)$ è negativa per $x < \frac{3}{2}$ e positiva per $x > \frac{3}{2}$;
- $f(x)$ ammette due punti stazionari di ascissa $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$, pertanto $f'(x)$ si annulla per $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$;
- $f(x)$ ammette due flessi, uno a tangente orizzontale in *O* e l'altro a tangente obliqua in *A*, e la retta tangente *t* in *A* ha coefficiente angolare $m = -2$; il grafico di $f'(x)$ passa pertanto per i punti $O(0;0)$ e $M(1;-2)$;
- $f(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x < 0$ e per $x > 1$, verso il basso per $0 < x < 1$, quindi $f'(x)$ è crescente per $x < 0$ e per $x > 1$, è decrescente per $0 < x < 1$, e ammette un massimo in *O* e un minimo in *M*.

Possiamo quindi tracciare un grafico plausibile della funzione $f'(x)$.



b) La funzione $f(x)$ è un polinomio di quarto grado, quindi:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

con *a*, *b*, *c*, *d*, *e* parametri reali. Di conseguenza, è:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d.$$

Ricaviamo i valori dei parametri sulla base dei dati del grafico di $f(x)$ assegnato.

- Il grafico di $f(x)$ passa per l'origine, quindi:

$$f(0)=0 \quad \to \quad e=0\,.$$

- Il grafico di $f(x)$ ha tangente orizzontale nell'origine, quindi:

$$f'(0)=0 \quad \to \quad d=0\,.$$

- Il grafico di $f(x)$ passa per $A(1;-1)$, quindi:

$$f(1)=-1 \quad \to \quad a+b+c=-1\,.$$

- Il grafico di $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y=1-2x$ in $A(1;-1)$, quindi:

$$f'(1)=-2 \quad \to \quad 4a+3b+2c=-2.$$

- Il grafico di $f(x)$ ha un punto di minimo di ascissa $\frac{3}{2}$, quindi:

$$f'\left(\frac{3}{2}\right)=0 \;\to\; 4a\cdot\frac{27}{8}+3b\cdot\frac{9}{4}+2c\cdot\frac{3}{2}=0 \;\to\; 54a+27b+12c=0 \;\to\; 18a+9b+4c=0\,.$$

Mettiamo a sistema le ultime tre condizioni per ricavare *a*, *b*, *c*:

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+3b+2c=-2 \\ 18a+9b+4c=0 \end{cases} \to \begin{cases} c=-1-a-b \\ 4a+3b-2-2a-2b=-2 \\ 18a+9b-4-4a-4b=0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} c=-1-a-b \\ 2a+b=0 \\ 14a+5b=4 \end{cases} \to \begin{cases} c=-1-a-b \\ b=-2a \\ 14a-10a=4 \end{cases} \to \begin{cases} c=-1-a-b \\ b=-2a \\ 4a=4 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ cercata è dunque:

$$f(x)=x^4-2x^3$$

e la derivata risulta:

$$f'(x)=4x^3-6x^2\,.$$

L'espressione analitica della derivata prima è in accordo con il grafico disegnato al punto precedente, infatti:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$;
- $f'(x)=2x^2(2x-3) \quad \to \quad f'(0)=f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$;
- $f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$ è positiva per $x<0 \vee x>1$ e negativa per $0<x<1$, quindi $f'(x)$ è crescente per $x<0 \vee x>1$ e decrescente per $0<x<1$ e inoltre $f'(x)$ ammette un massimo relativo in $x=0$ e un minimo relativo in $x=1$, con $f'(1)=4-6=-2$.