SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO

Risolvi uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} k \ln x^x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad k > 0$$

e la funzione $g(x) = \begin{cases} \ln x^{x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

1. Determina per quale valore di k la funzione f_k e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.
2. Detta f la funzione determinata al punto precedente, studia la continuità e la derivabilità di f e g nel punto $x = 0$.
3. Studia le funzioni f e g e disegna i grafici riferiti allo stesso sistema cartesiano ortogonale.
4. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata da f e da g, appartenente al semipiano $x \geq \frac{1}{4}$.

PROBLEMA 2

In una circonferenza di diametro $\overline{AD} = 2r$ è inscritto il triangolo isoscele ABC di base BC. Costruisci la piramide che ha per base il triangolo ABC e altezza il segmento AV congruente a BC.

1. Posto $\overline{AH} = x$, essendo H il punto medio del segmento BC, determina la funzione $y = f(x)$ che esprime il volume della piramide $ABCV$.
2. Disegna il grafico di f e determina per quale valore di x il volume della piramide è massimo.
3. In corrispondenza di tale valore determina l'angolo formato dalle facce ABC e VBC.
4. Se y_0 è il valore del volume massimo, calcola l'area della regione finita di piano appartenente al semipiano $x \geq 0$, delimitata dalla funzione f e dalla sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = y_0$.

QUESTIONARIO

1 Determina un'espressione generale delle coppie di numeri interi relativi che risolvono l'equazione:

$$3x + 5y = 6.$$

2 L'equazione $|x^2 - 1| + |4 - y^2| = 0$ nel piano cartesiano determina:

a) due rami di iperbole.

b) l'unione di un ramo di iperbole con un arco di circonferenza.

c) due punti soltanto.

d) l'insieme vuoto.

e) quattro punti soltanto.

Soltanto una delle alternative proposte è giusta.
Rispondi dando adeguata motivazione.

3 La proposizione: «un cono è equivalente a una piramide con base equivalente e altezza congruente a quella del cono» è vera o falsa? Motiva adeguatamente la risposta.

4 Determina la funzione $y = f(x)$ sapendo che:

$$y'' = -5e^{-x}, \quad y'(0) = 5, \quad y(1) = 5 - \frac{5}{e}.$$

5 Sia data la funzione

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } A \text{ sottoinsieme proprio di } \mathbb{R}, f \text{ derivabile } \forall x \in A.$$

Discuti la verità della seguente proposizione dando esauriente motivazione e riferendo almeno un esempio:
«condizione necessaria e sufficiente affinché f sia crescente (decrescente) su A è che risulti
$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0) \ \forall x \in A$».

6 Dimostra la seguente formula: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

7 Dimostra che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

è biiettiva nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
Determina il campo di esistenza, il codominio e l'espressione analitica della funzione inversa.

8 È data la funzione $f(x)$ continua su tutto $\mathbb{R}$ e della quale si sa che:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per quali valori reali di $k \neq 0$ è possibile calcolare l'integrale $\int_0^k f\left(\frac{x}{k}\right)dx$? Fornisci un esempio.

9 Dimostra la seguente proposizione:
«Se f è una funzione strettamente positiva, derivabile in tutto il suo dominio e tale che, $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, allora la funzione reciproca $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ soddisfa la seguente relazione:

$$f_1'(x) + f_1(x) = 1».$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione è ancora vera?

10 Dimostra che la funzione $y = x^4 - x - 1$ interseca l'asse delle ascisse in due punti.

SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

1. Riscriviamo le funzioni applicando le proprietà del logaritmo:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \quad k > 0; \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Tutte le funzioni date sono continue e derivabili per $x > 0$, con derivate:

$$f'_k(x) = k \ln x + k, \quad g'(x) = 2x \ln x + x \quad \text{quindi } f'_k(1) = k,\ g'(1) = 1.$$

Perciò f_k e g hanno la stessa tangente in $x = 1$ se $f'_k(1) = g'(1)$, ossia se

$$k = 1.$$

2. Indichiamo con $f(x)$ la funzione $f_1(x)$ corrispondente a $k = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad \text{(De L'Hospital)} \quad \text{pertanto } f \text{ è continua per } x = 0.$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h \ln h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \ln h = -\infty.$$

La f non è derivabile in $x = 0$ nel senso che la derivata diverge negativamente quindi ha per tangente l'asse delle ordinate.

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0, \text{ pertanto } g \text{ è continua in } x = 0.$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 \ln h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h \ln h = 0.$$

La g è derivabile in $x = 0$ e ha per tangente l'asse delle ascisse.

3. Studio di f e g.
Segno di f e intersezioni con gli assi:

$x \ln x > 0$ per $x > 1$ $\quad \to \quad$ $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$
$f(x) > 0$ se $x > 1$
$f(1) = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$
$\to$ f non ha asintoti orizzontali né obliqui.

Derivata prima: crescenza e decrescenza,
massimi e minimi:

$f'(x) = \ln x + 1 > 0$ per $x > e^{-1}$ $\quad \to$ f è crescente per $x > e^{-1}$
f è decrescente per $0 < x < e^{-1}$
$A(e^{-1}; -e^{-1})$ minimo relativo e assoluto.

$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \ \forall x > 0$ $\quad \to$ concavità verso l'alto.

Segno di g e intersezioni con gli assi:

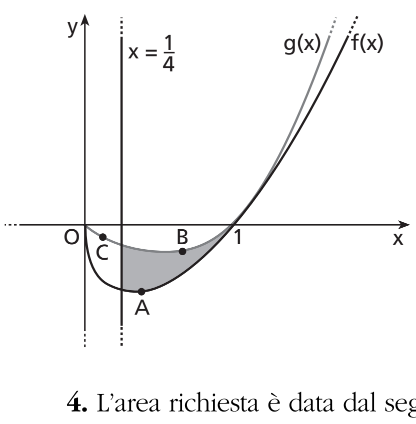
$x^2 \ln x > 0$ per $x > 1$ $\quad \to$ $g(x) < 0$ se $0 < x < 1$
$g(x) > 0$ se $x > 1$
$g(1) = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$ $\quad \to$ g non ha asintoti orizzontali né obliqui.

Derivata prima: crescenza e decrescenza,
massimi e minimi:

$g'(x) = x(2\ln x + 1) > 0$ per $x > e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \to$ g è crescente per $x > e^{-\frac{1}{2}}$
$\to$ g è decrescente per $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$
$B\left(e^{-\frac{1}{2}}; -\dfrac{1}{2}e^{-1}\right)$ min. rel. e assoluto.

$g''(x) = 2\ln x + 3 > 0$ per $x > e^{-\frac{3}{2}}$ $\quad \to$ concavità verso l'alto per $x > e^{-\frac{3}{2}}$
concavità verso il basso per $0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$
$C\left(e^{-\frac{3}{2}}; -\dfrac{3}{2}e^{-3}\right)$ punto di flesso.



◀ **Figura 1.**

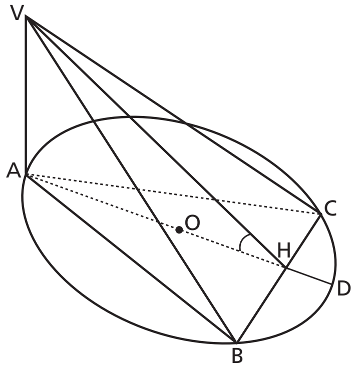
4. L'area richiesta è data dal seguente integrale che calcoleremo per parti:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} (x^2 \ln x - x \ln x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{4}}^{1} - \int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx =$$

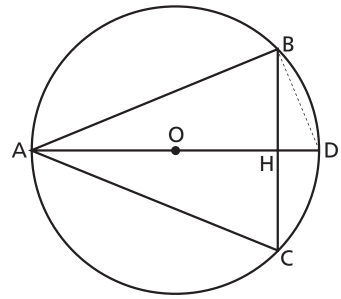
$$= \frac{1}{192}\ln 4 - \frac{1}{32}\ln 4 - \int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2}\right)dx = -\frac{5\ln 4}{192} - \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{4}}^{1} = \ldots = \frac{1}{8} - \frac{5\ln 2}{96}.$$

PROBLEMA 2

1. Costruiamo la figura.



◀ **Figura 2.**



▲ **Figura 3.**

Il dominio geometrico della variabile $\overline{AH} = x$ è l'intervallo $0 \leq x \leq 2r$.
Scriviamo l'espressione del volume della piramide $ABCV$ tenendo conto che $\overline{AV} = \overline{BC} = 2\overline{BH}$:

$$V_p = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} \cdot \overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{AH} \cdot (2\overline{BH}) = \frac{2}{3} \cdot \overline{BH}^2 \cdot \overline{AH}.$$

Applichiamo il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ADB (inscritto in una semicirconferenza) per esprimere $\overline{BH}$ in funzione di x:

$$\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HD}$$

$$\overline{AH} = x, \quad \overline{HD} = 2r - x \quad \rightarrow \quad \overline{BH}^2 = x(2r - x).$$

Ora scriviamo il volume della piramide in funzione di x:

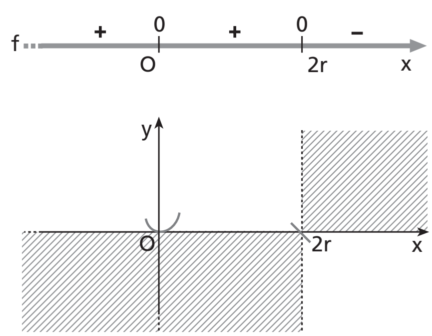
$$V_p = f(x) = \frac{2}{3} x(2r - x)x = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}rx^2, \qquad x \in [0; 2r].$$

2. Disegniamo il grafico eseguendo lo studio completo della funzione su tutto il suo campo di esistenza cioè $\forall x \in \mathbb{R}$.
f è un polinomio di terzo grado quindi è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$, non ha asintoti, ha un punto di flesso.
Segno e intersezioni con gli assi:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2(2r - x) > 0, \ x < 2r;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2(2r - x) < 0, \ x > 2r \wedge x \neq 0;$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ (radice doppia) oppure } x = 2r.$$

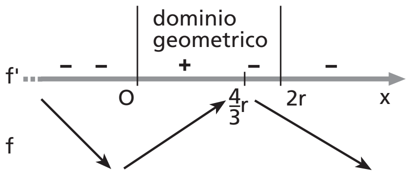


▶ **Figura 4.**

In $x=2r$ la funzione interseca l'asse delle ascisse. In $x=0$ la funzione è tangente all'asse delle ascisse perché ha una radice di molteplicità 2.
Derivata prima: crescenza e decrescenza, massimi e minimi.

$$f'(x) = -2x^2 + \frac{8}{3}rx \quad \text{dunque:}$$

$$f'(x) < 0 \ \leftrightarrow \ x < 0 \vee x > \frac{4}{3}r; \quad f'(x) > 0 \ \leftrightarrow \ 0 < x < \frac{4}{3}r.$$



◀ **Figura 5.**

$O=(0;\,0)$ è punto di minimo relativo;

$M=\left(\frac{4}{3}r;\, \frac{64}{81}r^3\right)$ è punto di massimo relativo.

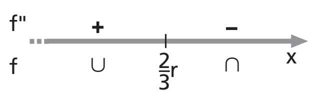
Nell'intervallo $[0;\,2r]$ la funzione, e quindi il volume della piramide, ha il massimo assoluto $y_0 = \frac{64}{81}r^3$ per $x_0 = \frac{4}{3}r$.
Completiamo lo studio con l'analisi della derivata seconda per la concavità e i flessi.

$$f''(x) = -4x + \frac{8}{3}r \quad \text{dunque:}$$

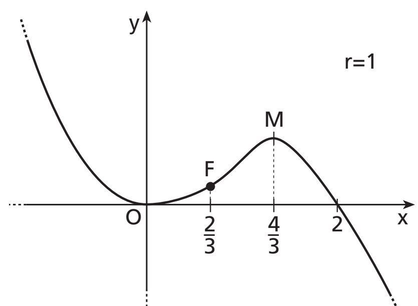
$f''(x) < 0 \ \leftrightarrow \ x > \frac{2}{3}r$, concavità verso il basso;

$f''(x) > 0 \ \leftrightarrow \ x < \frac{2}{3}r$, concavità verso l'alto;

$F\left(\frac{2}{3}r;\, \frac{32}{81}r^3\right)$ punto di flesso.



▲ **Figura 6.**



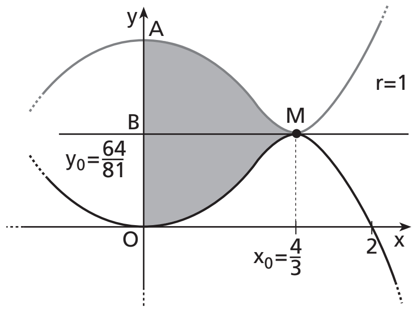
◀ **Figura 7.**

3. Le facce ABC e VBC formano un diedro convesso la cui sezione normale $V\hat{H}A$ è l'angolo richiesto. Determiniamo $V\hat{H}A$ mediante la sua tangente goniometrica:

$$\text{tg}(V\hat{H}A) = \frac{\overline{AV}}{\overline{AH}}.$$

Poiché $\overline{AH} = x_0 = \dfrac{4}{3} r$ e $\overline{AV} = 2\overline{BH} = 2\sqrt{x_0(2r - x_0)} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3} r$ avremo:
$\mathrm{tg}(V\hat{H}A) = \sqrt{2}$ $\quad (V\hat{H}A \simeq 57{,}735\ldots°)$.

4. Tracciamo il grafico sommario della funzione simmetrica di f rispetto alla retta $y = y_0 = \dfrac{64}{81} r^3$ senza ricavare la sua espressione analitica.



◀ **Figura 8.**

L'area da determinare, evidenziata con un fondino, è doppia dell'area della regione di piano delimitata dalla retta $y = y_0$, dall'asse delle ordinate e dalla funzione f. Pertanto:

$$S_{OMA} = 2S_{OMB} = 2\int_0^{\frac{4}{3}r} (y_0 - f(x))\, dx = 2\int_0^{\frac{4}{3}r} \frac{64}{81} r^3\, dx - 2\int_0^{\frac{4}{3}r} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3} r x^2\right) dx.$$

Calcoliamo i due integrali separatamente.

$$2\int_0^{\frac{4}{3}r} \frac{64}{81} r^3\, dx = \frac{128}{81} r^3 [x]_0^{\frac{4}{3}r} = \frac{512}{243} r^4.$$

$$2\int_0^{\frac{4}{3}r} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3} r x^2\right) dx = -\frac{4}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\frac{4}{3}r} + \frac{8}{3} r \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{4}{3}r} = -\frac{256}{243} r^4 + \frac{512}{243} r^4 = \frac{256}{243} r^4.$$

Il valore dell'area è dunque:

$$S_{OMA} = \frac{512}{243} r^4 - \frac{256}{243} r^4 = \frac{256}{243} r^4.$$

QUESTIONARIO

1 Ricaviamo la y in funzione di x, quindi scriviamo le soluzioni dell'equazione:

$$y = \frac{6 - 3x}{5} \quad \rightarrow \quad \left(x;\ y = \frac{6 - 3x}{5}\right) \text{ con } x, y \in \mathbb{Z}.$$

y è un numero intero se il numeratore $6 - 3x = 3(2 - x)$ è multiplo di 5, ossia se

$$2 - x = 0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots = 5p \quad \rightarrow \quad x = 2 - 5p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

La soluzione dell'equazione è data dalle seguenti coppie ordinate di numeri interi:

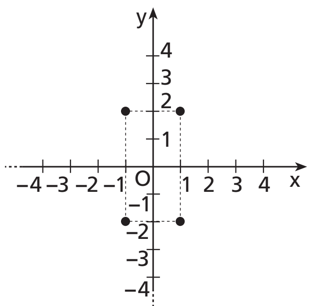
$$(x = 2 - 5p;\ y = 3p), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

2 La funzione valore assoluto per definizione è non negativa quindi l'equazione $|x^2-1|+|4-y^2|=0$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} |x^2-1|=0 \\ |4-y^2|=0 \end{cases}.$$

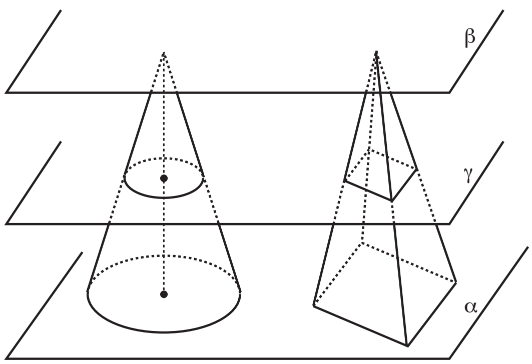
Le sue soluzioni sono:

$$\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$ ossia i quattro punti $(1; \pm 2)$, $(-1; \pm 2)$.



◀ **Figura 9.**

3 Disponiamo il cono e la piramide con le basi nello stesso piano α e i vertici nel medesimo semispazio. Poiché i due solidi hanno la stessa altezza, i vertici appartengono a uno stesso piano β parallelo ad α e ogni altro piano γ a essi parallelo e che intersechi uno dei due solidi interseca anche l'altro.
Il cono e la piramide hanno basi equivalenti quindi, come conseguenza del teorema di Talete nello spazio, le sezioni intercettate da γ sono equivalenti perché equidistanti dai rispettivi vertici. Per il principio di Cavalieri i due solidi sono dunque equivalenti.



◀ **Figura 10.**

4 L'espressione generale della derivata prima della funzione incognita è data dall'integrale indefinito della sua derivata seconda:

$$y' = \int -5e^{-x}\,dx = 5e^{-x} + k_1.$$

La derivata prima della funzione richiesta è quella che soddisfa la condizione:

$$5e^{-0} + k_1 = 5 \rightarrow k_1 = 0 \quad \text{quindi} \quad y' = 5e^{-x}.$$

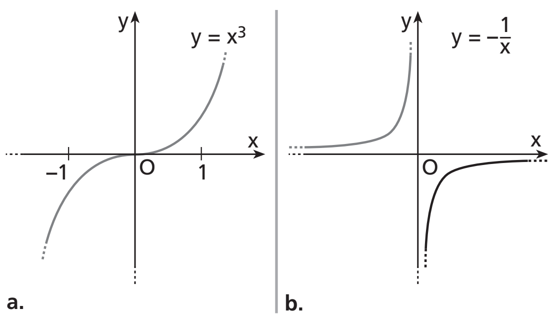
In modo simile determiniamo l'espressione generale della funzione incognita:

$$y = \int 5e^{-x}\,dx = -5e^{-x} + k_2.$$

In particolare, dovendo essere soddisfatta la condizione $y(1) = 5 - \frac{5}{e}$, avremo:

$$-5e^{-x} + k_2 = 5 - \frac{5}{e} \rightarrow k_2 = 5 \text{ quindi } y = 5(1 - e^{-x}).$$

5 Una funzione $f\colon A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice crescente su A se $\forall x_1, x_2 \in A$, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$.
La funzione f, derivabile in A, può essere crescente su A e avere derivata nulla in qualche punto. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$, $x \in [-1; 1]$, è crescente sull'intervallo $[-1; 1]$ ma $f'(0) = 0$ (figura 11.a). Pertanto la condizione $f'(x) > 0\ \forall x \in A$ non è necessaria.
Se la derivata di f è positiva $\forall x \in A$ può tuttavia accadere che $f(x_1) > f(x_2)$ per qualche $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Per esempio la funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (\mathbb{R} - \{0\})$, è derivabile in tutto il dominio però $f(-1) > f(1)$ pur essendo $-1 < 1$ (figura 11.b). Questa funzione è crescente nei due sottoinsiemi disgiunti $\mathbb{R}^-$ ed $\mathbb{R}^+$ ma non su $(\mathbb{R} - \{0\})$. Pertanto la condizione $f'(x) > 0\ \forall x \in A$ non è sufficiente.
La proposizione è dunque falsa.



◀ **Figura 11.**

6 $\binom{n}{k}$, per $k = 1, 2, \ldots, n$, è il numero delle combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k ed è anche il generico coefficiente dello sviluppo di $(a + b)^n$, ossia:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Basta dunque scegliere $a = b = 1$ per ottenere:

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k \rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{c.v.d.}$$

7 La funzione data è continua (il denominatore non ha radici reali ed è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$) e derivabile su $\mathbb{R}$. Dallo studio della sua derivata prima

$$f'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

otteniamo:

$$x<-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x)>0 \text{ e } f \text{ crescente;}$$

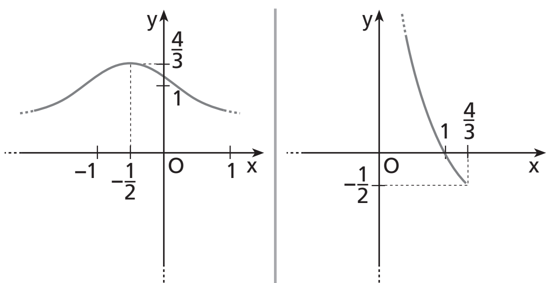
$$x>-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x)<0 \text{ e } f \text{ decrescente;}$$

$$x=-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ e } M\left(-\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right) \text{ max rel. e ass.}$$

Nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ la funzione è monotona decrescente e quindi è biiettiva e perciò invertibile (figura 12.a).

Questo intervallo è anche il codominio della funzione inversa.

Poiché in tale intervallo la f è strettamente positiva e $\frac{4}{3}$ è il massimo assoluto, l'intervallo $\left]0;\frac{4}{3}\right]$ è il codominio di f e quindi il dominio della sua inversa f^{-1} (figura 12.b).



a. La funzione f. **b.** La funzione inversa di f. **Figura 12.**

Per determinare l'espressione analitica di f^{-1} poniamo $y=f(x)$ e risolviamo l'equazione ottenuta rispetto alla variabile x:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x^2+x+1} \\ x\in\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[;\ y\in\left]0;\dfrac{4}{3}\right] \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} yx^2+yx+y-1=0 \\ \dots;\dots \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{y}-3} \\ \dots;\dots \end{cases}.$$

Scegliamo la soluzione con «+», compatibile con la condizione $x\geq-\frac{1}{2}$ e scambiamo le due variabili per ottenere l'espressione analitica di f^{-1}:

$$y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{x}-3}.$$

8 Calcoliamo l'integrale incognito col metodo della sostituzione:

$$\frac{x}{k}=t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ t=0 \end{cases},\ \begin{cases} x=k \\ t=1 \end{cases},\ dx=kdt, \quad \text{pertanto}$$

$$\int_0^k f\left(\frac{x}{k}\right)dx=k\int_0^1 f(t)\,dt=k\alpha,\ \forall k\neq 0.$$

Un esempio semplice è il seguente:

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{1}{6};\ \ k=3 \rightarrow \int_0^3 \left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}\right) dx = \left[\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{27}\right]_0^3 = \ldots = \frac{1}{2} = 3\int_0^1 (x-x^2)\,dx.$$

9 Dalle ipotesi su f deduciamo immediatamente che f_1 esiste per tutti i punti del dominio di f; inoltre:

$$f_1'(x) = -\frac{1}{[f(x)]^2} f'(x).$$

Pertanto, poiché per ipotesi è $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, si ha:

$$f_1'(x) + f_1(x) = -\frac{f(x)-[f(x)]^2}{[f(x)]^2} + \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)} + 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 \qquad \text{c.v.d.}$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione non è vera perché la funzione f_1 non esiste per quegli x tali che $f(x) = 0$. Naturalmente la proposizione rimane valida se la funzione data è strettamente negativa.

10 La funzione è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e non ha radici razionali.
Osserviamo che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = +\infty$$

$y' = 4x^3 - 1 \quad \rightarrow \quad$ per $x < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ y è strettamente decrescente

per $x > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ y è strettamente crescente

per $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ $y = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1 < 0$ è il minimo assoluto.

Per il teorema di esistenza degli zeri la funzione si annulla in due punti soltanto.
Il primo è compreso fra -1 e 0 perché $y(-1) = 1$ e $y(0) = -1$.
Il secondo è compreso fra 1 e 2 perché $y(1) = -1$ e $y(2) = 13$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 26 pag. W 140 • Problema 11 pag. V 91 • Problema 12 pag. S 183
Problema 2	• Problema 23 pag. V 285 • Esercizio 252 pag. W 121
Quesito 2	• Esercizio 384 pag. S 70 • Esercizio 391 pag. S 70
Quesito 3	• Teorema delle sezioni parallele di un angoloide pag. π 24 • Esercizio 105 pag. π 83 • Esercizio 106 pag. π 83
Quesito 4	• Problema 18 pag. W 71
Quesito 5	• Quesito 1 pag. V 288
Quesito 6	• Quesito 10 pag. W 177
Quesito 7	• Esercizio 114 pag. V 125
Quesito 8	• Quesito 4 pag. W 151
Quesito 10	• Quesito 6 pag. V 136